Podróże po Imperium Liczb

Część 15

Liczby, funkcje, ciągi, zbiory, geometria

Andrzej Nowicki

Wydanie drugie uzupełnione i rozszerzone

Olsztyn, Toruń, 2013

XYZ - 43(970) - 7.03.2013

Spis treści

Wstęp

Głównym tematem prezentowanej serii książek są liczby i ich przeróżne własności. Autor od najmłodszych lat zbierał wszelkie fakty i ciekawostki dotyczące najpierw liczb całkowitych i wielomianów o współczynnikach całkowitych, a następnie dotyczące również liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych oraz wielomianów nad tymi zbiorami liczbowymi. Nazbierało się sporo interesującego materiału, którego wybrane fragmenty będą tu przedstawione.

Materiał pochodzi z wielu różnych źródeł. Są tu zadania i problemy, które znajdziemy w popularnych czasopismach matematycznych. Wśród tych czasopism jest wychodzące od 1894 roku (przeważnie 10 numerów w roku) *The American Mathematical Monthly*. Są wśród tych czasopism również: angielskie czasopismo *Mathematical Gazette*, , kanadyjskie *Crux Mathematicorum*, rosyjskie *Kwant*, chińskie *Mathematical Excalibur*, itp. Godnymi uwagi są również polskie czasopisma popularno-naukowe: *Delta*, czasopismo dla nauczycieli *Matematyka* oraz inne.

Istotną rolę w prezentowanym materiale odegrały zadania z olimpiad i konkursów matematycznych całego świata. Każdego roku pojawiają się opracowania, książki oraz artykuły dotyczące zadań z różnych zawodów matematycznych. Wspomnijmy tylko o prestiżowych seriach książek z zawodów *International Mathematical Olympiad* (IMO) oraz *Putnam Mathematical Competition*. Sporo oryginalnych zadań znajduje się w opracowaniach dotyczących olimpiad matematycznych w Rosji lub w państwach byłego Związku Radzieckiego. Polska również ma wartościowe serie tego rodzaju książek.

Zebrany materiał pochodzi również z różnych starych oraz współczesnych podręczników i książek z teorii liczb. Wykorzystano liczne książki popularno-naukowe oraz prace naukowe publikowane w różnych czasopismach specjalistycznych. Są tu też pewne teksty pochodzące z internetu.

Większość prezentowanych faktów ma swoje odnośniki do odpowiedniej literatury. Odnośniki te wskazują tylko wybrane miejsca, w których można znaleźć albo informacje o danym zagadnieniu, albo rozwiązanie zadania, albo odpowiedni dowód. Bardzo często omawiany temat jest powtarzany w różnych pozycjach literatury i często trudno jest wskazać oryginalne źródła. Jeśli przy danym zagadnieniu nie ma żadnego odnośnika do literatury, to oznacza to, że albo omawiany fakt jest oczywisty i powszechnie znany, albo jest to własny wymysł autora.

Elementarna teoria liczb jest wspaniałym źródłem tematów zachęcających do pisania własnych programów komputerowych, dzięki którym można dokładniej poznać badane problemy. Można wykorzystać znane komputerowe pakiety matematyczne: MuPad, Mathematica, CoCoA, Derive, Maple i inne. W prezentowanej serii książek znajdziemy sporo wyników i tabel uzyskanych głównie dzięki pakietowi Maple.

We wszystkich książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb" stosować będziemy jednolite oznaczenia. Zakładamy, że zero nie jest liczbą naturalną i zbiór $\{1, 2, 3, \dots\}$, wszystkich liczb naturalnych, oznaczamy przez $\mathbb{N}$. Przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych, czyli zbiór $\mathbb{N}$ wzbogacony o zero. Zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych oznaczamy odpowiednio przez $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych oznaczamy przez $\mathbb{P}$.

Największy wspólny dzielnik liczb całkowitych $a_1, \dots, a_n$ oznaczamy przez $\mathrm{nwd}(a_1, \dots, a_n)$ lub, w przypadkach gdy to nie prowadzi do nieporozumienia, przez $(a_1, \dots, a_n)$. Natomiast najmniejszą wspólną wielokrotność tych liczb oznaczamy przez $\mathrm{nww}(a_1, \dots, a_n)$ lub $[a_1, \dots, a_n]$. Zapis $a \mid b$ oznacza, że liczba a dzieli liczbę b. Piszemy $a \nmid b$ w przypadku, gdy a nie dzieli b. Część całkowitą liczby rzeczywistej x oznaczamy przez $[x]$. Jeśli m jest liczbą naturalną, to $\varphi(m)$ jest liczbą wszystkich liczb naturalnych mniejszych lub równych m i względnie pierwszych z liczbą m. Liczbę elementów skończonego zbioru A oznaczamy przez $|A|$.

Pewne zamieszczone tutaj fakty przedstawione są wraz z ich dowodami. Początek dowodu oznaczono przez **D.**. Pojawiają się również symbole **R.**, **U.**, **W.** oraz **O.** informujące odpowiednio o początku rozwiązania, uwagi, wskazówki i odpowiedzi. Wszystkie tego rodzaju teksty zakończone są symbolem ⊠. Skrót "Odp." również oznacza odpowiedź.

Spis cytowanej literatury znajduje się na końcu tej książki (przed skorowidzami). Liczby pomiędzy nawiasami ⟨ oraz ⟩, występujące w tym spisie, oznaczają strony, na których dana pozycja jest cytowana. W pewnych podrozdziałach podano również literaturę dodatkową lub uzupełniającą. Informuje o tym symbol ★.

Seria "Podróże po Imperium Liczb" składa się z piętnastu nastpujących książek.

01. Liczby wymierne;
02. Cyfry liczb naturalnych;
03. Liczby kwadratowe;
04. Liczby pierwsze;
05. Funkcje arytmetyczne;
06. Podzielność w zbiorze liczb całkowitych;
07. Ciągi rekurencyjne;
08. Liczby Mersenne'a, Fermata i inne liczby;
09. Sześciany, bikwadraty i wyższe potęgi;
10. Liczby i funkcje rzeczywiste;
11. Silnie i symbole Newtona;
12. Wielomiany;
13. Nierówności;
14. Równanie Pella;
15. Liczby, funkcje, zbiory, geometria.

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" zostały wydane przez Wydawnictwo Naukowe Olsztyńskiej Wyższej Szkoły Informatyki i Zarządzania im. prof. Tadeusza Kotarbińskiego. Pierwsze wydania tych książek pojawiły się w latach 2008 – 2011. Autor otrzymał sporo interesujących listów z uwagami i komentarzami dotyczącymi omawianych zagadnień. Były też listy, w których wytknięto szereg pomyłek, błędów i niedokładności. Autorom tych wszystkich listów należą się szczere i serdeczne podziękowania.

Teraz, w tym drugim wydaniu książek serii "Podróże po Imperium Liczb", przesłane uwagi zostały uwzględnione. Naprawiono błędy, dołączono pewne dowody oraz podano nową aktualną literaturę. Wydanie to jest rozszerzone, uzupełnione i wzbogacone o pewne nowe rozdziały lub podrozdziały.

---

o o o o o

W piętnastej książce z serii "Podróże po Imperium Liczb", zajmujemy się liczbami, funkcjami, ciągami, zbiorami i geometrią. Jest to ostatnia książka z tej serii. Przedstawiamy w niej pewne dodatkowe zagadnienia, którymi nie zajmowaliśmy się w poprzednich książkach.

Książka składa się z dwunastu niezależnych rozdziałów. W rozdziałach pierwszym i drugim zajmujemy się ciągami, których wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi. Rozpatrujemy zarówno ciągi skończone jak i nieskończone. Wiele przeróżnych informacji o tego rodzaju ciągach podaliśmy już w innych książkach prezentowanej serii. Tutaj przedstawiamy, między innymi, skończone ciągi Langforda oraz pary nieskończonych ciągów komplementarnych. Pojawią się również funkcje określone na zbiorze liczb całkowitych oraz działania określone na różnych zbiorach.

W rozdziale trzecim mowa jest o zbiorach. Analizujemy w nim pewne podzbiory różnych zbiorów liczbowych. Sporo miejsca poświęcamy na rozbicia zbiorów na parami rozłączne podzbiory. Z tego rozdziału dowiemy się, na przykład, że zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$ można rozbić na trzy parami rozłączne podzbiory o jednakowych sumach wtedy i tylko wtedy, gdy n jest większe od 4 i jedna z liczb n lub $n-1$ jest podzielna przez 3. Dowiemy się również, że istnieje nieskończony zbiór przeliczalny posiadający nieprzeliczalną rodzinę podzbiorów taką, że przekrój dowolnych dwóch różnych podzbiorów jest zbiorem skończonym.

Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach i n jest większe od k, to w którejś szufladce znajdują się co najmniej dwa przedmioty. Ten oczywisty fakt, zwany *zasadą szufladkową Dirichleta*, ma wiele przeróżnych zastosowań. Z zasady szufladkowej Dirichleta korzystaliśmy już wielokrotnie w dowodach różnych faktów przedstawionych w książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb". W rozdziale czwartym przedstawiamy inne zebrane zadania i fakty, w których tę zasadę się wykorzystuje.

Spójrzmy na poniższą nieskończoną tablicę liczbową.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	⋯
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	⋯
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	⋯
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	⋯
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	⋯
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

W pierwszym wierszu tej tablicy są kolejne liczby naturalne, w drugim kolejne wielokrotności dwójki, w trzecim kolejne wielokrotności trójki, itd. W trzecim wierszu znajdziemy, na przykład, klatkę z liczbą 15. Sąsiadami tej klatki są klatki z liczbami 8, 10, 12, 18, 24, 20, 16 i 12. Suma tych wszystkich sąsiednich liczb jest równa 120, czyli jest 8 razy większa od początkowej liczby 15. Okazuje się, że tak jest zawsze. Otrzymana suma sąsiednich liczb jest zawsze 8 razy większa od danej wybranej liczby. Prosty dowód tego jest w rozdziale piątym o tablicach liczbowych. W rozdziałach 5 i 7 znajdziemy również inne tego rodzaju ciekawostki liczbowe.

Spójrzmy na następujące równości:

$$2 + 2 = 2 \cdot 2, \quad 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \tfrac{4}{3} + \tfrac{7}{6} + \tfrac{9}{2} = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{9}{2}.$$

W każdej z tych równości występują liczby, których suma jest równa ich iloczynowi. Tego rodzaju przykładów jest znacznie więcej. Zajmujemy się tym w rozdziale szóstym, Zbadamy szczegółowo pewne problemy dotyczące rozwiązań równań postaci

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n.$$

Badamy również zbiory rozwiązań trochę innych równań. Do powstania tego rozdziału w dużej mierze przyczynił się Lew Kurlandczyk, z którym autor w latach 1998 – 1999 wspólnie rozważał omawiane w tym rozdziale zagadnienia.

W rozdziale ósmym badamy funkcję $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, określoną wzorem

$$D\Big((x_1, x_2, \dots, x_n)\Big) = \Big(|x_1 - x_2|,\ |x_2 - x_3|,\ \dots,\ |x_{n-1} - x_n|,\ |x_n - x_1|\Big),$$

dla wszystkich ciągów $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zajmujemy się głównie ciągami postaci

$$x,\ D(x),\ D^2(x),\ D^3(x),\ \dots\ ,$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i gdzie każde D^m oznacza m-krotne złożenie funkcji D. Niech $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Jeśli istnieje m takie, że $D^m(x)$ jest ciągiem zerowym, to najmniejsze takie m oznaczamy przez $L(x)$ i nazywamy *rangą* ciągu x. Jeśli natomiast takie m nie istnieje, to mówimy, że ciąg x ma *nieskończoną rangę* i fakt ten zapisujemy jako $L(x) = \infty$.

Które ciągi mają skończoną rangę? Czy dla każdej liczby naturalnej m istnieje ciąg o danej długości n, posiadający rangę równą m? Czy funkcja L, ograniczona do zbioru ciągów o skończonej randze, ma jakieś górne ograniczenie? Odpowiedzi na tego typu pytania znajdziemy właśnie w rozdziale siódmym.

W 1948 roku B. Freedman udowodnił, że każdy n-wyrazowy ciąg liczb całkowitych ma skończoną rangę wtedy i tylko wtedy, gdy n jest potęgą dwójki. W ostatnim podrozdziale rozdziału siódmego przedstawiamy pewien elegancki dowód tego twierdzenia. Jest to algebraiczny dowód podany w 1979 roku przez P. Zvengrowskiego.

Rozdziały 9, 10 i 11 mają charakter raczej geometryczny. W rozdziale dziewiątym zajmujemy się punktami kratowymi, czyli takimi punktami leżącymi na płaszczyźnie lub w przestrzeni, których wszystkie współrzędne są liczbami całkowitymi. Cały rozdział dziesiąty poświęcony jest na omówienie związków liczbowych zachodzących pomiędzy podstawowymi elementami trójkąta. Różne inne fakty i zadania geometryczne są w rozdziale jedenastym. Książkę tę kończy rozdział dwunasty o gęstych podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych.

Zakończyliśmy drugie wydanie serii "Podróże po Imperium Liczb". Ta książka jest ostatnią z tej serii. Do opublikowania tych książek namówił mnie mgr inż. **Janusz Żwirko**, Kanclerz Olsztyńskiej Wyższej Szkoły Informatyki i Zarządzania. Bez jego słów zachęty pewnie bym nigdy tego nie opublikował. W całym procesie wydawniczym dzielnie spisywali się koledzy **Krzysztof Berent** i **Jerzy Niestępski**. Prof. dr hab. **Tadeusz Krasiński** napisał ciepłą recenzję.

Wszystkim wymienionym osobom składam serdeczne podziękowania.

Toruń, 7 marca 2013 roku, Andrzej Nowicki

1 Ciągi, funkcje i działania

1.1 Ciągi Langforda

Spójrzmy na 14-wyrazowy ciąg

$$4,\ 6,\ 1,\ 7,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 6,\ 2,\ 3,\ 7,\ 2,\ 5.$$

Wyrazami tego ciągu są liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Każda z tych liczb występuje dwa razy. Pomiędzy dwiema jedynkami jest jedna liczba. Pomiędzy dwiema dwójkami są dwie liczby. Pomiędzy trójkami mamy trzy liczby, itd. Pomiędzy dwiema siódemkami znajduje się dokładnie siedem liczb. Podobną własność ma 8-wyrazowy ciąg

$$2,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,$$

którego wyrazami są liczby $1, 2, 3, 4$ i każda z nich występuje dokładnie dwa razy. Pomiędzy dwoma wyrazami równymi k, gdzie $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, występuje dokładnie k liczb.

Tego rodzaju skończone ciągi nazywa się ciągami Langforda ([MG] 43(346)(1959) 250-255, [OM] Chiny 1986). Jeśli n jest liczbą naturalną, to każdy $(2n)$-wyrazowy ciąg, o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i posiadający omawianą własność, nazywamy *n-ciągiem Langforda*

1.1.1. *Przykłady n-ciągów Langforda.*

$$\begin{aligned}
n = 3 :&\quad 2, 3, 1, 2, 1, 3.\\
n = 4 :&\quad 2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4.\\
n = 7 :&\quad 4, 6, 1, 7, 1, 4, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 2, 5.\\
n = 8;&\quad 4, 6, 1, 7, 1, 4, 8, 5, 6, 2, 3, 7, 2, 5, 3, 8.\\
n = 11 :&\quad 8, 6, 10, 3, 1, 11, 1, 3, 6, 8, 5, 9, 7, 10, 4, 2, 5, 11, 2, 4, 7, 9.\\
n = 12 :&\quad 8, 6, 10, 3, 1, 11, 1, 3, 6, 8, 12, 9, 7, 10, 4, 2, 5, 11, 2, 4, 7, 9, 5, 12.
\end{aligned}$$

1.1.2. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli istnieje n-ciąg Langforda, to*

$$n \equiv 0 \pmod 4 \quad \textit{lub} \quad n \equiv 3 \pmod 4.$$

([MG] 43(346)(1959) 250-255, [OM] Chiny 1986).

D. Załóżmy, że pierwsza liczba k stoi na miejscu o numerze a_k. Wtedy druga liczba k stoi na miejscu o numerze $a_k + k + 1$. Wszystkie dane liczby zajmują miejsca z numerami od 1 do $2n$. Suma wszystkich numerów jest więc równa $1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1)$. Z drugiej strony:

$$(a_1 + a_1 + 2) + (a_2 + a_2 + 3) + \cdots + (a_n + a_n + n + 1) = 2(a_1 + \cdots a_n) + \frac{n(n+3)}{2}$$

czyli $2(a_1 + \cdots + a_n) + \dfrac{n(n+3)}{2} = n(2n + 1)$. Stąd wynika, że

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(3n-1)}{4}$$

jest liczbą naturalną. To jest możliwe tylko wtedy, gdy $n = 4k$ lub $n = 4k - 1$. ⊠

1.1.3. *Jeśli n jest taką liczbą naturalną, że $n \equiv 0 \pmod 4$ lub $n \equiv 3 \pmod 4$, to istnieje n-ciąg Langforda.* ([MG] 43(346)(1959) 250-255, [OM] Chiny 1986).

D. Niech $n = 4m$. Dla $m \leqslant 2$ przykłady podane są w 1.1.1. Załóżmy, że $m \geqslant 3$. Mamy wtedy następujący n-ciąg Langforda:

$$
\begin{aligned}
&4m-4, \cdots (p) \cdots, 2m, 4m-2, 2m-3, \cdots (n) \cdots, 1, 4m-1, 1, \cdots (n) \cdots, 2m-3,\\
&2m, \cdots (p) \cdots, 4m-4, 4m, 4m-3, \cdots (n) \cdots, 2m+1, 4m-2, 2m-2, \cdots (p) \cdots, 2,\\
&2m-1, 4m-1, 2, \cdots (p) \cdots, 2m-2, 2m+1, \cdots (n) \cdots, 4m-3, 2m-1, 4m.
\end{aligned}
$$

Niech $n = 4m-1$. Dla $m \leqslant 2$ przykłady podane są w 1.1.1. Załóżmy, że $m \geqslant 3$. Mamy wtedy następujący n-ciąg Langforda:

$$
\begin{aligned}
&4m-4, \cdots (p) \cdots, 2m, 4m-2, 2m-3, \cdots (n) \cdots, 1, 4m-1, 1, \cdots (n) \cdots, 2m-3,\\
&2m, \cdots (p) \cdots, 4m-4, 2m-1, 4m-3, \cdots (n) \cdots, 2m+1, 4m-2, 2m-2, \cdots (p) \cdots, 2,\\
&2m-1, 4m-1, 2, \cdots (p) \cdots, 2m-2, 2m+1, \cdots (n) \cdots, 4m-3.
\end{aligned}
$$

Przez $\cdots (p) \cdots$ oznaczyliśmy ciąg kolejnych liczb parzystych, a przez $\cdots (n) \cdots$ ciąg kolejnych liczb nieparzystych. ⊠

1.1.4. *Wyrazami ciągu $(a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{50})$ są liczby całkowite od 0 do 24, przy czym każda z tych liczb występuje dokładnie dwa razy. Wiadomo, że jeśli $a_i = a_j$ dla $i < j$, to $j - i = a_i + 1$. Czy taki ciąg istnieje?*

O. Istnieje. Przykłady:

(23, 21, 19, 17, 24, 22, 20, 18, 16, 7, 5, 8, 6, 4, 0, 0, 5, 7, 4, 6, 8, 17, 19, 21, 23, 16, 18, 20, 22, 24, 14, 12, 10, 15, 13, 11, 9, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 10, 12, 14, 9, 11, 13, 15) lub

(23, 20, 18, 21, 24, 22, 16, 19, 17, 6, 7, 8, 4, 5, 0, 0, 6, 4, 7, 5, 8, 18, 20, 16, 23, 21, 17, 19, 22, 24, 12, 14, 11, 15, 13, 9, 10, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 12, 11, 9, 14, 10, 13, 15).

Pierwszy ciąg podał Z. Dimitri (Francja), a drugi ciąg podali M. Efimow i W. Sawczenko (Mołdawia) podczas konkursu zadaniowego w Zakopanem 1995 roku. ⊠

★ R. O. Davies, *On Langford's problem*, [MG] 43(346)(1959) 253-255.
C. J. Priday, *On Langford's problem*, [MG] 43(346)(1959) 250-253.
N. Shalaby, T. Stuckless, *The existence of Looped Langford sequences*, [Crux] 2000 86-92.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Zadania o skończonych ciągach liczb naturalnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2.1. *Sumą liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$ jest 3989. Wykazać, że istnieją takie liczby naturalne n, m, że $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} = 95$.* ([OM] Indie 1997).

1.2.2. *Dane są takie liczby naturalne $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_m$, że*

$$x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_m < nm.$$

Wykazać, że w równości $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_m$ można skreślić kilka składników tak, że równość pozostanie prawdziwa. ([WaJ] 248(77), [Kw] 7/1978 36).

1.2.3. *Niech $a_1, \dots, a_n$ będą liczbami naturalnymi (niekoniecznie różnymi). Niech f_k (dla $k = 1, 2, \dots$) oznacza liczbę tych liczb spośród $a_1, \dots, a_n$, które są większe lub równe k. Wtedy*

$$f_1 + f_2 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$ ([OM] Leningrad 1964, [Fom] 32/64).

1.2.4. *Spośród liczb $1, 2, \dots, 99$ wybrano 50 takich liczb, że suma każdych dwóch jest różna od 99 i różna od 100. Wykazać, że wybrano liczby 50, 51, ..., 99.* ([OM] St Petersburg 1996).

1.2.5. *Dla jakich $n \geqslant 3$ istnieją takie parami różne liczby naturalne $a_1, \dots, a_n$, mniejsze od $n+2$, że wszystkie liczby $|a_1 - a_2|$, $|a_2 - a_3|$, $\dots$, $|a_{n-1} - a_n|$, $|a_n - a_1|$ są parami różne?*
Odp. *Dla $n = 4k$ lub $n = 4k + 3$.* ([Kw] 3/1983 47).

1.2.6. *Niech A będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych, że $|a - b| \geqslant \frac{ab}{25}$, dla wszystkich $a, b \in A$. Wykazać, że zbiór A ma co najmniej 9 elementów. Podać przykład 9-cio elementowego takiego zbioru.* ([IMO] Shortlist 1985).

1.2.7. *Dla jakich liczb naturalnych n istnieją takie liczby naturalne $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, że zbiór $\frac{n(n-1)}{2}$ wszystkich dodatnich różnic $a_i - a_j$, gdzie $i > j$, jest zbiorem*

$$\left\{1, 2, 3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\right\} ?$$

Uwaga. *To jest możliwe dla $n = 4$, mianowicie $1 < 3 < 6 < 7$. Czy to jest możliwe dla $n > 4$?.* (Newman problem 92).

1.2.8. *Każdy wyraz ciągu $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$ jest równy 2, 5 lub 9, przy czym $a_{2n+1} = a_1$ oraz każde dwa sąsiednie wyrazy są różne. Wykazać, że*

$$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - \cdots + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1} = 0.$$ ([Kw] 6/2001 M1772 s.20).

1.2.9. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech A będzie zbiorem wszystkich $3n$-wyrazowych ciągów, których wyrazami są 0 i 1.*

Jeśli $\alpha, \beta \in A$, to piszemy $\alpha \leftrightarrow \beta$, jeśli ciąg β powstaje z ciągu α przez zamianę miejscami dwóch trójek kolejnych wyrazów. Mówić będziemy, że ciągi α i β są podobne, jeśli istnieje liczba naturalna s oraz istnieją ciągi $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in A$ takie, że

$$\alpha = \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \gamma_s = \beta.$$

(1) *Podobieństwo jest relacją typu równoważności w zbiorze A.*

(2) *Moc zbioru wszystkich klas abstrakcji względem relacji podobieństwa jest równa $(n+1)^3$.*

(3) *Jeśli $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{3n})$ jest ciągiem należącym do A, to oznaczamy:*

$$\alpha_1 = (a_1, a_4, a_7, \dots, a_{3n-2}), \quad \alpha_2 = (a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-1}), \quad \alpha_3 = (a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3n}).$$

Ponadto, przez $|\alpha_i|$ (dla $i = 1, 2, 3$) oznaczamy liczbę zer ciągu α_i. Dwa ciągi $\alpha, \beta \in A$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy $|\alpha_1| = |\beta_1|$, $|\alpha_2| = |\beta_2|$ i $|\alpha_3| = |\beta_3|$. ([Kw] 3/1974 40).

1.2.10. *Liczby naturalne od* 1 *do* 101 *wypisano w dowolnym porządku. Udowodnić, że można z tych* 101 *liczb wykreślić* 90 *tak, aby pozostałych* 11 *tworzyło ciąg monotoniczny.*
([OM] Moskwa 1950, [Dlt] 5/1974).

1.2.11. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Z dowolnego ciągu* $n^2 + 1$ *parami różnych liczb naturalnych można wykreślić* $n^2 - n$ *liczb tak, że pozostałe liczby tworzą ciąg monotoniczny.* ([Dlt] 5/1974).

1.2.12. *Ile jest liczb naturalnych o ściśle malejących cyfrach?* Odp. 1022. ([Mock] 2005).

★ A. Pełczyński, *Trzy rozwiązania zadania o* 101 *liczbach*, [Dlt] 5/1974 1-3.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Zadania z nieskończonymi ciągami liczb naturalnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3.1. *Dany jest ściśle taki rosnący ciąg* (x_n) *o wyrazach naturalnych, że* $x_1 > 1$ *oraz* $x_{n+1} \leqslant 2n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej* k *istnieją takie liczby naturalne* m, n, *że* $k = x_n - x_m$. ([Bryn] 5.2).

1.3.2. *Niech* (x_n) *będzie ciągiem, którego wyrazami są nieujemne liczby całkowite. Wiadomo, że* $x_2 = 0$, $x_3 > 0$, $x_{9999} = 3333$ *oraz*

$$x_{n+m} - x_n - x_m \in \Big\{0, 1\Big\} \quad \textit{dla wszystkich} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Wyznaczyć x_{1982}. ([Bryn] 6.4).

O. $x_{1982} = 660$. Przykładem takiego ciągu jest $x_n = \left[\frac{n}{3}\right]$. ⊠

1.3.3. *Niech* (a_n) *będzie niemalejącym ciągiem liczb naturalnych, takim że ciąg* $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ *jest nieograniczony. Wtedy wśród wyrazów ciągu* $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ *istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.* ([Br83] 74).

1.3.4. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem takich liczb naturalnych, że*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} - a_n \in \Big\{0, 1\Big\} \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Niech $I = \Big\{n/a_n;\ n \in \mathbb{N}\Big\} \cap \mathbb{N}$. *Wykazać, że zbiór* I *jest odcinkiem liczb naturalnych.* ([Mon] 40(3)(1933) E7).

1.3.5. *Istnieje taki ciąg liczb naturalnych, że każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić w postaci różnicy pewnych dwóch liczb tego ciągu.*
([Kw] 5/1975 52, [GaT] 20/74, [Zw] 1998).

D. Początkowe wyrazy: 10, 11, 100, 102, 1000, 1003, ... Konstruujemy ten ciąg następująco:

$$\begin{cases} a_1 &= 10, \\ a_2 &= 11, \\ a_{2n+1} &= 10^{r_n}, \\ a_{2n+2} &= 10^{r_n} + r_n, \end{cases}$$

gdzie r_n jest najmniejszą liczbą naturalną, której nie można przedstawić jako różnicy dwóch liczb spośród $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. ⊠

1.3.6. *Skonstruować dwa nieskończone podzbiory A i B zbioru $\mathbb{N}_0$ takie, by każdą liczbę $n \in \mathbb{N}_0$ można było jednoznacznie przedstawić w postaci $n = a + b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$.* (L. Kurlandczyk 1996).

D. Stosować będziemy dwójkowy system numeracji. Niech zbiór A składa się z zera oraz wszystkich liczb naturalnych, które w zapisie dwójkowym mają jedynki tylko na nieparzystych miejscach (licząc z prawej strony). Niech zbiór B składa się z zera oraz wszystkich liczb naturalnych, które w zapisie dwójkowym mają jedynki tylko na miejscach parzystych.

$$A = \Big\{0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, \ldots\Big\}, \quad B = \Big\{0, 2, 8, 10, 32, 34, 40, 42, \ldots\Big\}.$$

Zbiory A i B posiadają rozważaną własność. ⊠

1.3.7. *Dany jest nieskończony ciąg $a_1 < a_2 < \ldots$ takich liczb naturalnych, że każda liczba naturalna jest albo wyrazem tego ciągu, albo sumą dwóch (niekoniecznie różnych) wyrazów.*

(1) *Wykazać, że $a_n \leqslant n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$.* ([Kw] 5/1973 32).

(2) *Podać przykład takiego ciągu.* ([Kw] 5/1973 32).

R. (2). Przykładem takiego ciągu jest rosnący ciąg wszystkich liczb naturalnych, które są sumami dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wiadomo bowiem (twierdzenie Lagrange'a), że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb całkowitych. ⊠

1.3.8. *Istnieje ciąg liczb naturalnych posiadający następujące dwie własności.*

(1) *Ciąg jest okresowy modulo m dla każdej liczby naturalnej m.*

(2) *Każda liczba naturalna występuje w tym ciągu nieskończenie wiele razy.*

([Mon] 100(9)(1993) 877-878 z.10184).

1.3.9. *Ciąg (a_n) liczb naturalnych jest taki, że $a_{n+1} > a_{a_n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że $a_n = n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Innymi słowy, jedyną funkcją $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że*

$$f(n+1) > f\Big(f(n)\Big)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, jest funkcja tożsamościowa. (Newman Problem 56, [San2] 11).

1.3.10. *Dla dowolnych trzech nieskończonych ciągów liczb naturalnych (a_n), (b_n), (c_n) istnieją takie dwa numery $p \neq q$, że $a_p \geqslant a_q$, $\quad b_p \geqslant b_q$, $\quad c_p \geqslant c_q$.* ([OM] ZSRR 1961).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Liczby 6174 oraz 495 i inne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpatrzmy dowolną czterocyfrową liczbę naturalną n. Oznaczmy przez n_1 oraz n_2 liczby powstałe z cyfr liczby n uporządkowanych w sposób odpowiednio niemalejący oraz nierosnący i oznaczmy przez $r(n)$ różnicę $n_1 - n_2$. Jeśli na przykład $n = 4547$, to $n_1 = 7544$, $n_2 = 4457$ oraz $r(n) = 7544 - 4457 = 3087$. Dla $n = 1530$ mamy:

$$n_1 = 5310, \quad n_2 = 135, \quad r(n) = 5310 - 135 = 5175.$$

Z otrzymaną nową liczbą $r(n)$ zróbmy to samo i proces ten powtórzmy kilka razy. Startując na przykład od liczby $n = 4547$ otrzymujemy kolejno liczby:

$$\begin{aligned} 3087 &= 7544 - 4457, \\ 8352 &= 8730 - 378, \\ 6174 &= 8532 - 2358, \\ 6174 &= 7641 - 1467. \end{aligned}$$

Może się tak zdarzyć, że otrzymana nowa liczba $r(n)$ nie jest czterocyfrowa. Tak jest na przykład dla $n = 1121$. Tutaj $r(n) = 2111 - 1112 = 999$. W takich przypadkach dopisujemy zera na początku liczby $r(n)$ (tyle zer by nowa liczba miała dokładnie 4 cyfry) i proces kontynuujemy. Dla $n = 1121$ mamy kolejno:

$$\begin{aligned} 0999 &= 2111 - 1112, \\ 8991 &= 9990 - 0999, \\ 8082 &= 9981 - 1899, \\ 8532 &= 8820 - 0288, \\ 6174 &= 8532 - 2356, \\ 6174 &= 7641 - 1467. \end{aligned}$$

Dla $n = 1530$ otrzymujemy:

$$1530 \mapsto 5175 \mapsto 5994 \mapsto 5355 \mapsto 1998 \mapsto 8082 \mapsto 8532 \mapsto 6174 \mapsto 6174.$$

W każdym z tych przykładów pojawiła się liczba 6174. Łatwo sprawdzić (na przykład za pomocą komputera), że:

1.4.1. *Liczba* 6174 *jest jedyną taką czterocyfrową liczbą naturalną n, dla której zachodzi równość $r(n) = n$.*

W opisanym procesie wyjątek stanowią czterocyfrowe liczby zbudowane z tych samych cyfr: $1111,\ 2222,\ \dots,\ 9999$. Dla takich liczb n zachodzi równość $r(n) = 0$. Są to wszystkie czterocyfrowe liczby naturalne podzielne przez 1111.

W 1949 roku D. R. Kaprekar opublikował następujące interesujące stwierdzenie.

1.4.2 (Kaprekar 1949)**.** *Jeśli n jest dowolną czterocyfrową liczbą naturalną niepodzielną przez* 1111*, to w ciągu $n,\ r(n),\ r(r(n)),\ r(r(r(n))),\ \dots$ zawsze pojawi się liczba* 6174*.*

To stwierdzenie łatwo można sprawdzić za pomocą komputera. Zauważmy, że każda liczba postaci $r(n)$ jest podzielna przez 9. Wystarczy więc zbadać tylko wszystkie takie czterocyfrowe liczby o niemalejących cyfrach, które są podzielne przez 9.

Do liczby 6174 dochodzi się zawsze powtarzając opisaną procedurę maksymalnie 7 razy. Innymi słowy:

1.4.3. *Dla każdej czterocyfrowej liczby naturalnej n, niepodzielnej przez* 1111*, zachodzi równość* $r^7(n) = 6174$.

W powyższym stwierdzeniu zastosowaliśmy standardowe oznaczenia dotyczące iteracji operacji r :

$$r^0(n) = n, \quad r^1(n) = r(n), \quad r^2(n) = r(r(n)), \quad r^3(n) = r(r(r(n))), \quad \cdots .$$

Oznaczmy przez A_4 zbiór wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 10^4 i niepodzielnych przez 1111, tzn.

$$A_4 = \Big\{1, 2, 3, \dots, 9999\Big\} \smallsetminus \Big\{1111,\ 2222,\ \dots,\ 9999\Big\}.$$

Zbiór ten ma dokładnie 9990 elementów. Każda liczba należąca do A_4 ma co najwyżej 4 cyfry. Dopisując ewentualnie zera na początku możemy uważać, że każda liczba ze zbioru A_4 ma dokładnie 4 cyfry i przy tym co najmniej dwie jej cyfry są różne. Omawiana operacja r jest więc pewną funkcją określoną na zbiorze A_4, o wartościach również w zbiorze A_4. Łatwo można sprawdzić, że równość, występująca w powyższym stwierdzeniu 1.4.3, zachodzi dla wszystkich elementów zbioru A_4. Zanotujmy:

1.4.4. *Dla każdej liczby naturalnej n, należącej do zbioru A_4, zachodzi równość* $r^7(n) = 6174$.

Jeśli $n \in A_4$, to przez $c(n)$ oznaczać będziemy najmniejszą liczbę naturalną k taką, że $r^k(n) = 6174$. Z powyższego stwierdzenia wiemy, że $1 \leqslant c(n) \leqslant 7$. Z podanych tutaj przykładów wynika, że: $c(6174) = 1$, $c(4547) = 3$, $c(1121) = 5$, $c(1530) = 7$.

1.4.5. *Liczby wszystkich liczb n ze zbioru A_4, dla których $c(n)$ jest jedną z danych wartości $1, 2, \dots, 7$. W prawej kolumnie podano początkowe przykłady.*

1	384	$26, 136, 246, 356, 466, 1137, 1247, 1357, 1467, 1577$
2	576	$24, 48, 68, 134, 158, 178, 244, 268, 288, 378, 488, 1135$
3	2400	$12, 13, 17, 18, 29, 34, 36, 39, 47, 67, 79, 89, 122, 123$
4	1272	$2, 4, 7, 9, 11, 19, 44, 46, 66, 99, 112, 114, 117, 119, 129$
5	1518	$1, 23, 27, 35, 38, 45, 55, 56, 57, 78, 111, 133, 137, 145$
6	1654	$3, 5, 6, 8, 22, 28, 33, 37, 77, 88, 113, 115, 116, 118, 138$
7	2184	$14, 15, 16, 25, 49, 58, 59, 69, 124, 125, 126, 135, 159$

Z tabeli tej odczytujemy, że na przykład w zbiorze A_4 jest dokładnie 1518 *takich liczb n, że $c(n) = 5$. Odczytujemy również, że:*

$$c(1) = 5, \quad c(2) = 4, \quad c(3) = 6, \quad c(4) = 4, \quad c(5) = 6,$$
$$c(6) = 6, \quad c(7) = 4, \quad c(8) = 6, \quad c(9) = 4.$$

Rozważaliśmy liczby czterocyfrowe. Przejdźmy teraz do liczb trzycfrowych. Oznaczmy przez A_3 zbiór wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 10^3 i niepodzielnych przez 111, tzn.

$$A_3 = \Big\{1, 2, 3, \dots, 999\Big\} \smallsetminus \Big\{111,\ 222,\ \dots,\ 999\Big\}.$$

Zbiór ten ma dokładnie 990 elementów. Każda liczba należąca do A_3 ma co najwyżej 3 cyfry. Dopisując ewentualnie zera na początku możemy uważać, że każda liczba ze zbioru A_3 ma dokładnie 3 cyfry i przy tym co najmniej dwie jej cyfry są różne.

Dla każdej liczby n ze zbioru A_3 oznaczmy przez n_1 oraz n_2 liczby powstałe z trzech cyfr liczby n (uwzględniając ewentualne początkowe zera) uporządkowanych w sposób odpowiednio niemalejący oraz nierosnący i oznaczmy przez $r_3(n)$ różnicę $n_1 - n_2$. Jeśli na przykład $n = 454$, to $n_1 = 544$, $n_2 = 445$ oraz $r_3(n) = 544 - 445 = 99$. Dla $n = 99$ mamy:

$$n_1 = 990, \quad n_2 = 99, \quad r_3(n) = 990 - 99 = 891.$$

Przyporządkowanie $n \mapsto r_3(n)$ jest funkcją określoną na zbiorze A_3, o wartościach również w zbiorze A_3. W dalszym ciągu r_3 oznaczać będziemy przez r. Z każdą liczbą n ze zbioru A_3 stowarzyszony jest więc ciąg liczbowy

$$r^0(n) = n, \quad r^1(n) = r(n), \quad r^2(n) = r(r(n)), \quad r^3(n) = r(r(r(n))), \quad \cdots .$$

Jeśli na przykład $n = 454$, to z liczbą tą stowarzyszony jest ciąg

$$454, \quad 99, \quad 891, \quad 792, \quad 693, \quad 594, \quad 495, \quad 495, \quad \cdots .$$

Pojawiła się liczba 495. Łatwo wykazać, że:

1.4.6. *Liczba* 495 *jest jedyną taką liczbą n należącą do zbioru A_3, że $r(n) = n$*

1.4.7. *Jeśli n jest dowolną liczbą ze zbioru A_3, to w ciągu n, $r(n)$, $r(r(n))$, $\dots$ zawsze pojawi się liczba* 495.

D. Niech a, b, c będą takimi cyframi systemu dziesiętnego, że $a \leqslant b \leqslant c$ oraz $a < c$. Niech $n_1 = 100c + 10b + a$ oraz $n_2 = 100a + 10b + c$. Wtedy

$$n_1 - n_2 = 99(c - a).$$

Tezę wystarczy więc sprawdzić tylko dla wszystkich takich liczb n ze zbioru A_3, które są podzielne przez 99, czyli tylko dla dziewięciu liczb:

$$99, \quad 198, \quad 297, \quad 396, \quad 495, \quad 594, \quad 693, \quad 792, \quad 891.$$

W każdym przypadku pojawi się liczba 495. ⊠

Do liczby 495 dochodzi się zawsze powtarzając opisaną procedurę maksymalnie 6 razy. Innymi słowy:

1.4.8. *Dla każdej liczby n ze zbioru A_3 zachodzi równość $r^6(n) = 495$.*

Jeśli $n \in A_3$, to przez $c(n)$ oznaczać będziemy najmniejszą liczbę naturalną k taką, że $r^k(n) = 495$. Z powyższego stwierdzenia wiemy, że $1 \leqslant c(n) \leqslant 6$.

1.4.9. *Liczby wszystkich liczb n ze zbioru A_3, dla których $c(n)$ jest jedną z danych wartości $1, 2, \ldots, 6$. W prawej kolumnie podano początkowe przykłady.*

1	150	$5, 15, 25, 35, 45, 55, 116, 126, 136, 146, 156, 166, 227$
2	144	$6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 117, 127, 137, 147, 157, 167$
3	270	$4, 7, 14, 17, 24, 27, 34, 37, 44, 47, 57, 67, 77, 115, 118$
4	222	$3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 114, 119$
5	150	$2, 9, 12, 19, 22, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 113, 123$
6	54	$1, 11, 112, 122, 223, 233, 334, 344, 445, 455, 556, 566$

Z tabeli tej odczytujemy, że na przykład w zbiorze A_3 jest dokładnie 150 takich liczb n, że $c(n) = 5$. Odczytujemy również, że:

$$\begin{aligned} &c(1) = 6, \quad c(2) = 5, \quad c(3) = 4, \quad c(4) = 3, \quad c(5) = 1, \\ &c(6) = 2, \quad c(7) = 3, \quad c(8) = 4, \quad c(9) = 5. \end{aligned}$$

To samo zagadnienie dla liczb dwucyfrowych doprowadzi nas zawsze do liczby 9. W odpowiednim zbiorze A_2 nie ma jednak takiej liczby n, dla której zachodzi równość $r(n) = n$. Startując od $n = 9$ otrzymujemy pętlę:

$$9 \mapsto 81 \mapsto 63 \mapsto 27 \mapsto 45 \mapsto 9.$$

Przejdźmy do liczb posiadających co najmniej 5 cyfr (z uwzględnieniem ewentualnych początkowych zer).

Niech $s \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech e_s będzie liczbą $11\ldots1$; składającą się z dokładnie s jedynek. Oznaczmy przez A_s zbiór tych wszystkich liczb naturalnych, które są mniejsze od 10^s oraz nie są podzielne przez e_s. Każda liczba należąca do A_s ma co najwyżej s cyfr. Dopisując ewentualnie zera na początku możemy uważać, że każda liczba ze zbioru A_s ma dokładnie s cyfr i przy tym co najmniej dwie jej cyfry są różne. W ten sam co poprzednio sposób definiujemy funkcję

$$r_s : A_s \to A_s,$$

którą oznaczać będziemy przez r. Przedstawiamy pewne stwierdzenia dotyczące zbiorów A_5, A_6, A_7 oraz A_8; otrzymane za pomocą Maple.

1.4.10.

(1) *Nie ma takiej liczby $n \in A_5$, dla której zachodzi równość $r(n) = n$.*

(2) *Jeśli n jest dowolną liczbą ze zbioru A_5, to w ciągu $\left(r^j(n)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zawsze pojawi się jedna z trzech liczb:* 53955, 61974, 62964.

(3) *W zbiorze A_5 istnieją trzy pętle:*

$$\begin{gathered} 53955 \mapsto 59994 \mapsto 53955; \\ 61974 \mapsto 82962 \mapsto 75933 \mapsto 63954 \mapsto 61974 \\ 62964 \mapsto 71973 \mapsto 83952 \mapsto 74943 \mapsto 62964 \end{gathered}$$

1.4.11.

(1) *Istnieją dokładnie dwie takie liczby $n \in A_6$, dla których zachodzi równość $r(n) = n$. Są to liczby* 549945 *oraz* 631764.

(2) *Jeśli n jest dowolną liczbą ze zbioru A_6, to w ciągu $\left(r^j(n)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zawsze pojawi się jedna z trzech liczb:* 420876, 549945, 631764.

(3) *W zbiorze A_6 istnieje jedna pętla:*

$$420876 \mapsto 851742 \mapsto 750843 \mapsto 840852 \mapsto 860832 \mapsto 862632 \mapsto 642654 \mapsto 420876.$$

1.4.12.

(1) *Nie ma takiej liczby $n \in A_7$, dla której zachodzi równość $r(n) = n$.*

(2) *Jeśli n jest dowolną liczbą ze zbioru A_7, to w ciągu $\left(r^j(n)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zawsze pojawi się liczba* 7509843 *oraz pętla:* $7509843 \mapsto 9529641 \mapsto 8719722 \mapsto 8649432 \mapsto 7519743$
$\mapsto 8429652 \mapsto 7619733 \mapsto 8439552 \mapsto 7509843.$

1.4.13.

(1) *Istnieją dokładnie dwie takie liczby $n \in A_8$, dla których zachodzi równość $r(n) = n$. Są to liczby* 63317664 *oraz* 97508421.

(2) *Jeśli n jest dowolną liczbą ze zbioru A_8, to w ciągu $\left(r^j(n)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zawsze pojawi się jedna z czterech liczb:* 43208766, 63317664, 64308654, 97508421.

(3) *W zbiorze A_8 istnieją dwie pętle:*

$$43208766 \mapsto 85317642 \mapsto 75308643 \mapsto 84308652 \mapsto 86308632 \mapsto 86326632 \mapsto 64326654 \mapsto 43208766;$$

$$64308654 \mapsto 83208762 \mapsto 86526432 \mapsto 64308654.$$

Rozpatrywaliśmy liczby naturalne zapisane w systemie dziesiętnym. Podobne zagadnienie można badać również w innych systemach numeracji. Niech $q \geqslant 2$ oraz $s \geqslant 2$ będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Oznaczmy przez $e_s(q)$ liczbę naturalną zbudowaną w systemie numeracji o podstawie q z samych jedynek i tych jedynek jest dokładnie s, tzn.

$$e_s(q) = q^{s-1} + q^{s-2} + \cdots + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Oznaczmy przez $A_s(q)$ zbiór tych wszystkich liczb naturalnych, które są mniejsze od q^s i nie są podzielne przez $e_s(q)$. Każda liczba należąca do zbioru $A_s(q)$ ma, w systemie numeracji o podstawie q, co najwyżej s cyfr. Dopisując ewentualnie zera na początku możemy uważać, że każda liczba ze zbioru A_s ma w rozpatrywanym systemie numeracji dokładnie s cyfr i przy tym co najmniej dwie jej cyfry są różne. W szczególności mamy: $A_s(10) = A_s$ oraz $e_s(10) = e_s$. W ten sam co poprzednio sposób definiujemy funkcję

$$r : A_s(q) \to A_s(q).$$

Wyjaśnijmy to dokładniej. Niech $n \in A_s(q)$. Wtedy

$$n = \Big(a_{s-1}a_{s-2}\dots a_1a_0\Big)_q = a_{s-1}q^{s-1} + a_{s-2}q^{s-2} + \cdots + a_1q + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}$ są liczbami należącymi do zbioru $\{0, 1, \dots, q-1\}$. Nie zakładamy, że a_{s-1} jest różne od zera. Wszystkie liczby $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}$ ustawiamy w ten sposób by tworzyły ciąg niemalejący. Oznaczmy ten niemalejący ciąg przez $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_{s-2} \geqslant b_{s-1}$. Przyjmujemy wówczas:

$$r(n) = \Big(b_0b_1\dots b_{s-2}b_{s-1}\Big)_q - \Big(b_{s-1}b_{s-2}\dots b_1b_0\Big)_q.$$

Niech dla przykładu $q = 3$, $s = 4$ oraz $n = 25$. Wtedy $r(25) = 58$, gdyż $25 = 0221_3$ i mamy:

$$\begin{aligned} r(25) &= 2210_3 - 0122_3 \\ &= (2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 0) - (0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2) \\ &= 75 - 17 \\ &= 58. \end{aligned}$$

1.4.14. *Ośmocyfrowe liczby w systemie trójkowym. Jeśli n jest dowolną liczbą ze zbioru $A_8(3)$, to w ciągu $\big(r^j(n)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ zawsze pojawi się liczba $5332 = 21022111_3$. Jest to jedyna taka liczba n należąca do zbioru $A_8(3)$, dla której zachodzi równość $r(n) = n$.*

1.4.15. *W tabelach podano przykłady takich trójek (q, s, m), że dla dowolnej liczby n, należącej do zbioru $A_s(q)$, w ciągu $\big(r^j(n)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ zawsze pojawi się liczba m.*

q	s	m
2	3	$3 = 11_2$
3	3	$8 = 22_3$
3	4	$32 = 1012_3$
3	5	$184 = 20211_3$
3	6	$320 = 102212_3$
3	8	$5332 = 21022111_3$
4	3	$30 = 132_4$
4	5	$570 = 20322_5$

q	s	m
5	3	$48 = 143_5$
5	4	$392 = 3032_5$
5	5	$1992 = 30432_5$
5	6	$7488 = 214423_5$
5	7	$53712 = 3204322_5$
5	8	$249992 = 30444432_5$
6	3	$105 = 253_6$
6	4	$430 = 1554_6$
6	7	$218960 = 4405412_6$

q	s	m
7	3	$144 = 264_7$
7	4	$1068 = 3054_7$
7	5	$9936 = 40653_7$
7	6	$55500 = 320544_7$
7	7	$640992 = 5306532_7$
7	8	$3562968 = 42166443_7$
8	3	$252 = 374_8$
9	3	$320 = 385_9$
9	6	$183696 = 308876_9$
9	7	$3496800 = 6518633_9$

★ D. R. Kaprekar, *Another Solitaire Game*, Scripta Math. 15(1949) 244-245.
D. R. Kaprekar, *An Interesting Property of the Number 6174*, Scripta Math.(1955) 244-245.
D. R. Kaprekar, *On Kaprekar numbers*, Journal of Recreational Mathematics 13 (2)(1980) 81-82.
Y. Nishiyama, *Mysterious number 6174*,
`http://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174`.

Autor dziękuje Profesorowi Wojciechowi Rytterowi za intersującą informację o liczbie 6174.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Funkcje z N do N oraz z N_0 do N_0

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5.1. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją i niech $a \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy ciąg:*

$$a, \ f(a), \ ff(a), \ \cdots .$$

Ciąg ten jest albo okresowy, albo rozbieżny do $+\infty$.

1.5.2. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \smallsetminus \{1\}$ będzie funkcją różnowartościową. Istnieje wtedy nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że $f(n) > n$.* ([TT] Spring 1982).

1.5.3. *Jeśli $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ są takimi funkcjami, że f jest surjekcją, g jest injekcją oraz $f(n) \geqslant g(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $f = g$.* ([Crux] 1999 s.35).

1.5.4. *Znaleźć co najmniej jedną funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że*

$$f\Big(f(n)\Big) = n^2$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Dlt] 5/1993).

R. Niech $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wszystkich niekwadratowych liczb naturalnych ustawionych w porządku wzrastania;

$$s_1 = 2, \ s_2 = 3, \ s_3 = 5, \ s_4 = 6, \ \cdots .$$

Niech $a(k, m) = (s_k)^{2^m}$ dla $k \geqslant 1, m \geqslant 0$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby $k \geqslant 1$, $m \geqslant 0$ takie, że $n = a(k, m)$. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przyjmując:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \ n = 1, \\ a(2p, m), & \text{gdy } \ n = a(2p-1, m), m \geqslant 0, p \in \mathbb{N}, \\ a(2p-1, m+1), & \text{gdy } \ n = a(2p, m), m \geqslant 0, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja f spełnia warunki zadania. ⊠

1.5.5. *Jeśli $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jest funkcją taką, że*

$$f\Big(m^2 + n^2\Big) = f(m)^2 + f(n)^2,$$

dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}_0$, to f jest identycznością. ([Mon] 99(8)(1992) E3445).

1.5.6. *Jeśli $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jest funkcją taką, że*

$$f\Big(f(n)\Big) + f(n) = 2n + 6,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$, to $f(n) = n + 2$. ([OM] Austria 1990, [Crux] 1992 s.70).

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Funkcje z $\mathbf{N}_0$ do $\mathbf{N}_0$ spełniające równość $f(f(n)) = n + a$

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6.1. *Istnieje nieskończenie wiele funkcji $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takich, że $f\Big(f(n)\Big) = n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.*

D. Niech $u, v \in \mathbb{N}_0$, $u \neq v$. Niech $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ będzie funkcją taką, że $f(u) = v$, $f(v) = u$ oraz $f(n) = n$ dla wszystkich n różnych od u i v. Funkcja ta oczywiście spełnia żądany warunek. ⊠

1.6.2. *Jeśli $a \in \mathbb{N}_0$ jest liczbą parzystą i $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jest funkcją określoną wzorem*

$$f(n) = n + \frac{a}{2},$$

to $f\Big(f(n)\Big) = n + a$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

1.6.3. *Niech* $f(n) = \begin{cases} n+3, & \textit{gdy } n \textit{ parzyste,} \\ n-1, & \textit{gdy } n \textit{ nieparzyste.} \end{cases}$

Wtedy $f\Big(f(n)\Big) = n + 2$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

1.6.4. *Niech $a, b \in \mathbb{N}_0$ będą liczbami nieparzystymi i niech $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ będzie funkcją określoną wzorami*

$$f(n) = \begin{cases} n+a, & \textit{gdy } n \textit{ parzyste,} \\ n+b, & \textit{gdy } n \textit{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Wtedy $f\Big(f(n)\Big) = n + (a+b)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

D. Dla $n = 2p$ mamy:

$$f(f(n)) = f(f(2p)) = f(2p+a) = 2p + a + b = n + (a+b),$$

natomiast dla $n = 2p + 1$ mamy:

$$f(f(n)) = f(f(2p+1)) = f(2p+1+b) = 2p + 1 + b + a = n + (a+b). \ \boxtimes$$

1.6.5. *Niech $a \in \mathbb{N}_0$ i niech $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ będzie taką funkcją, że*

$$f(f(n)) = n + a,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas:

(1) *Funkcją f jest różnowartościowa.*

(2) $f(n + ma) = f(n) + ma$ *dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}_0$.*

D. (2). Dla $m = 1$ mamy:

$$f(n+a) = f(f(f(n))) = f(n) + a.$$

Załóżmy, że dla pewnego m (i każdego n) zachodzi równość $f(n+ma) = f(n) + ma$. Wtedy:

$$f(n+(m+1)a) = f((n+a)+ma) = f(n+a)+ma = f(n)+a+ma = f(n)+(m+1)a. \boxtimes$$

1.6.6. *Nie istnieje żadna funkcja* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *taka, że* $f(f(n)) = n+1$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$.

D. Przypuśćmy, że taka funkcja f istnieje. Oznaczmy $f(0) = x \in \mathbb{N}_0$. Wtedy (na mocy 1.6.5)

$$f(m) = f(0 + m \cdot 1) = f(0) + m = x + m$$

dla $m \in \mathbb{N}_0$. W szczególności, $f(1) = x+1$. Zatem,

$$2 = 1 + 1 = f(f(1)) = f(x+1) = x + x + 1 = 2x + 1$$

i stąd mamy sprzeczność: $1 = 2x$. $\boxtimes$

1.6.7. *Nie istnieje żadna funkcja* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *taka, że* $f(f(n)) = n + 1987$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$. ([OM] Polska 1986).

1.6.8. *Jeśli* $a \in \mathbb{N}$ *jest liczbą nieparzystą, to nie istnieje żadna funkcja* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *taka, że*

$$f(f(n)) = n + a$$

dla wszystkich $a \in \mathbb{N}_0$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Funkcje z Z do Z

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7.1. *Jeśli* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *jest rosnącą surjekcją, to istnieje takie* $a \in \mathbb{Z}$, *że*

$$f(x) = x + a$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. ([Mat] 6/1993 371).

1.7.2. *Niech* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *będzie funkcją taką, że*

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1,$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Z}$, *Są dokładnie trzy takie funkcje: funkcja stała* 1, *funkcja* $f(x) = x+1$ *oraz funkcja przyjmująca wartść* 1 *dla liczb parzystych i* 0 *dla liczb nieparzystych.* ([OM] Białoruś 1999).

1.7.3. *Znaleźć wszystkie takie funkcje* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *że:* $f(1) = 1$ *oraz*

$$f(ab) = f(a) + f(b) + ab$$

dla $a, b \in \mathbb{Z}$. Odp. $f(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$. ([Mat] 5/1978 309).

1.7.4. *Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie funkcją taką że:*

(1) $f(2) = 2$;

(2) $f(ab) = f(a)f(b)$, *dla* $a, b \in \mathbb{Z}$;

(3) $f(a) > f(b)$, *dla* $a > b$.

Wykazać, że $f(a) = a$, *dla wszystkich* $a \in \mathbb{Z}$. ([OM] Kanada 1969).

1.7.5. *Niech A będzie niepustym skończonym podzbiorem zbioru liczb całkowitych. Jeśli $f : A \to A$ jest bijekcją, to liczba*

$$\sum_{a \in A} |a - f(a)|$$

jest parzysta. ([Mat] 1/1995 53).

D. Zauważmy, że $|x| \equiv x \pmod 2$ dla $x \in \mathbb{Z}$. Stąd otrzymujemy:

$$\sum_{a\in A} |a - f(a)| \equiv \sum_{a\in A} (a - f(a)) = \sum_{a\in A} a - \sum_{a\in A} f(a) = \sum_{a\in A} a - \sum_{a\in A} a = 0. \quad \boxtimes$$

1.7.6. *Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie funkcją taką, że*

$$f(f(a)) = -a$$

dla wszystkich $a \in \mathbb{Z}$. Funkcja ta ma następujące własności.

(1) *f jest bijekcją.*

(2) *f jest funkcją nieparzystą (tzn. $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{Z}$).*

(3) $f(a) = 0 \iff a = 0$.

(4) *Przykładem takiej funkcji jest funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zdefiniowana równościami:*

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(2n-1) &= 2n, \\ f(2n) &= -2n+1, \\ f(-(2n-1)) &= -2n, \\ f(-2n) &= 2n-1, \end{aligned}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Czechosłowacja 1983/1984).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Funkcje z Z do Z spełniające równość $f(f(n)) = n + a$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8.1. *Niech $a \in \mathbb{Z}$ i niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie funkcją taką, że*

$$f(f(x)) = x + a$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Wtedy funkcja f jest bijekcją i jej funkcja odwrotna $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełnia równość $g(g(x)) = x - a$, dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$.

1.8.2. *Jeśli $a \in \mathbb{Z}$ jest liczbą parzystą, to funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ określona wzorem*

$$f(x) = x + \frac{a}{2}$$

spełnia równość $f(f(x)) = x + a$, dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$.

1.8.3. *Niech $0 \neq a \in \mathbb{Z}$. Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie taką funkcją, że*

$$f(f(x)) = x + a$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Wtedy:

(1) $f(x + ya) = f(x) + ya$, *dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Z}$;*

(2) *jeśli $x \equiv y \pmod{|a|}$, to $f(x) \equiv f(y) \pmod{|a|}$;*

(3) $f(x) \not\equiv x \pmod{|a|}$, *dla $x \in \mathbb{Z}$.*

1.8.4. *Nie istnieje żadna funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że $f(f(x)) = x + 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$.*

1.8.5. *Niech $a \in \mathbb{Z}$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(a) *Istnieje funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że $f(f(x)) = x + a$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Liczba a jest parzysta.*

1.8.6. *Niech $a \in \mathbb{Z}$ i niech $s \in \mathbb{N}$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(a) *Istnieje funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że $f^s(x) = x + a$, dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$, gdzie f^s oznacza s-tą iterację funkcji f.*

(b) *Liczba a jest podzielna przez s.*

★ M. Kapelewski, *Wielomianowe równania funkcyjne*, [Pmgr] 2003.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9 Działania

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9.1. *Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że:*

$$f(a, a) = 0, \quad f(a, f(b, c)) = f(a, b) + c \quad \text{dla} \;\; a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Odp. $f(x, y) = x - y$. ([OMm] 1996).

1.9.2. *Funkcja $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ spełnia warunki:*

(a) $f(0, y) = y + 1$,

(b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$,

(c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$,

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{N}_0$. Wyznaczyć $f(4, 1981)$. ([Bryn] 6.9).

O. $f(4,1981) = -3 + 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ (1984 dwójki). ⊠

1.9.3. *Niech X będzie zbiorem i niech $*: X \times X \to X$ będzie działaniem spełniającym dwa warunki:*

(1) $x * x = x$, *dla* $x \in X$*;*

(2) $(x * y) * z = (y * z) * x$, *dla* $x, y, z \in X$.

Wykazać, że działanie $*$ jest przemienne i łączne. ([Putn] 1971).

D.
$$\begin{aligned} x * y &= (x*y)*(x*y) = ((x*y)*x)*y \\ &= ((y*x)*x)*y = ((x*x)*y)*y \\ &= (x*y)*y = (y*y)*x \\ &= y*x. \\ (x*y)*z &= (y*z)*x \\ &= x*(y*z). \end{aligned}$$
⊠

1.9.4. *Niech X będzie zbiorem i niech $*: X \times X \to X$ będzie działaniem spełniającym dwa warunki:*

(1) $x * (x * y) = y$, *dla* $x, y \in X$*;*

(2) $(y * x) * x = y$, *dla* $x, y \in X$.

Takie $*$ jest zawsze działaniem przemiennym i nie musi być działaniem łącznym.

Przykład: $X = \mathbb{Z}$,
$$x * y = -x - y;$$
działanie $*$ jest przemienne i nie jest łączne. ([Putn] 1972).

1.9.5. *Niech X będzie skończonym zbiorem posiadającym co najmniej dwa elementy. Istnieje wtedy takie działanie $*: X \times X \to X$, że:*

(1) $x * z = y * z \Longrightarrow x = y$, *dla* $x, y, z \in X$,

(2) $x * (y * z) \neq (x * y) * z$, *dla* $x, y, z \in X$. ([Putn] 1984).

D. Niech $\varphi: X \to X$ będzie bijekcją bez punktów stałych. Definiujemy
$$x * y = \varphi(x).$$
Działanie $*$ spełnia powyższe dwa warunki. ⊠

1.9.6. *Niech X będzie zbiorem i niech $*: X \times X \to X$ będzie operacją taką, że*
$$(x * y) * x = y,$$
dla wszystkich $x, y \in X$. Wykazać, że $x * (y * x) = y$ dla $x, y \in X$. ([Putn] 2001).

1.9.7. *Niech* $M = \{1, 2, \dots, 1993\}$. *Dana jest funkcja* $* : M \times M \to M$ *taka, że*

$$(a * b) * b = b,$$

dla wszystkich $a, b \in M$. *Wykazać, że istnieje takie* $a \in M$, *że* $a * a = a$. ([Fom] 34/93).

1.9.8. *Działanie* $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia dwa warunki:*

(1) $x * x = 0$, *dla* $x \in \mathbb{R}$;

(2) $x * (y * z) = (x * y) + z$, *dla* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Obliczyć $1993 * 1935$. ([OM] Moskwa 1993).

R. ([FieK] s.107). Przyjmując $y = z$ mamy: $(x*y)+y = x*(y*y) = x*0$ i stąd $x*y = (x*0)-y$. Ale

$$x * 0 = x * (x * x) = (x * x) + x = 0 + x = x.$$

Zatem, $x * y = x - y$. W szczególności, $1993 * 1935 = 1993 - 1935 = 58$.

Uwaga. Jeśli $x * y = x - y$, to oczywiście spełnione są warunki (1) i (2). ⊠

1.9.9. *Niech* S *będzie zbiorem wszystkich liczb nieparzystych większych od* 1. *Dla każdego* $x \in S$ *oznaczmy przez* $\delta(x)$ *jedyną liczbę naturalną taką, że*

$$2^{\delta(x)} < x < 2^{\delta(x)+1}.$$

Dla $x, y \in S$ *definiujemy:*

$$x * y = 2^{\delta(x)-1}(y - 3) + x.$$

Przykłady: $5 * 7 = 13$, $7 * 5 = 11$. *Wykazać, że* $x * y \in S$ *dla* $x, y \in S$ *oraz*

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

dla $x, y, z \in S$. ([OM] Irlandia 1997).

2 Ciągi komplementarne

Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przypomnijmy, że w tej książce (oraz we wszystkich książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb") najmniejszą liczbą naturalną jest jedynka. Zera nie zaliczamy do zbioru $\mathbb{N}$. Natomiast przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$ czyli zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych.

W tym rozdziale zajmować się będziemy nieskończonymi ciągami, których wszystkie wyrazy są liczbami naturalnymi lub nieujemnymi liczbami całkowitymi. Interesować nas będą głównie dwie klasy ciągów.

Do pierwszej klasy zaliczać będziemy każdy taki ciąg, który spełnia trzy warunki:

(1) wszystkie jego wyrazy są liczbami naturalnymi;

(2) jest ściśle rosnący;

(3) liczby naturalne, które nie są jego wyrazami tworzą zbiór nieskończony.

Zbiór wszystkich ciągów należących do tej pierwszej klasy oznaczać będziemy przez $\mathcal{M}$. Ciągi o wyrazach naturalnych utożsamiać będziemy z funkcjami z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Zatem, $\mathcal{M}$ jest zbiorem wszystkich takich ściśle rosnących funkcji $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla których zbiór $\mathbb{N} \smallsetminus F(\mathbb{N})$ jest nieskończony.

Do drugiej klasy zaliczać będziemy wszystkie takie nieskończone ciągi

$$f = \Big(f_1,\ f_2,\ f_3, \dots\Big),$$

które spełniają następujące trzy warunki:

(a) wszystkie wyrazy $f_1, f_2, f_3, \dots$, są nieujemnymi liczbami całkowitymi;

(b) $f_n \leqslant f_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, tzn. f jest ciągiem niemalejącym;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

W tym przypadku warunek (c) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg f jest nieograniczony. Zbiór wszystkich ciągów tej drugiej klasy oznaczać będziemy przez $\mathcal{A}$. Tego rodzaju ciągi utożsamiać będziemy z funkcjami z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}_0$. Zatem, $\mathcal{A}$ jest zbiorem wszystkich niemalejących i nieograniczonych funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}_0$. Elementem zbioru $\mathcal{A}$ jest na przykład ciąg

$$f = (0, 0, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 7, \dots).$$

Przez taki zapis rozumiemy, że $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$, itd. lub $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 2$, itd.

Wyjaśnijmy pojęcia, które będą się często pojawiały w tym rozdziale. Załóżmy, że $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest ciągiem należącym do zbioru $\mathcal{M}$ (tzn. F jest ściśle rosnącym ciągiem o wyrazach naturalnych i zbiór $\mathbb{N} \smallsetminus F(\mathbb{N})$ jest nieskończony). W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych usuńmy te wszystkie liczby, które są wyrazami ciągu F. Pozostanie nam wtedy nieskończenie wiele liczb. Powstanie nam wtedy nowy, ściśle rosnący ciąg G. Mówić będziemy, że ten nowy ciąg G jest *uzupełnieniem* ciągu F. Zauważmy, że jeśli ciąg F należy do zbioru $\mathcal{M}$, to ciąg G również do tego zbioru należy. Uzupełnieniem ciągu G jest ciąg F.

Uzupełnieniem ciągu wszystkich nieparzystych liczb naturalnych jest ciąg wszystkich parzystych liczb naturalnych. Uzupełnieniem ciągu liczb kwadratowych $(1, 4, 9, \dots)$ jest ciąg wszystkich liczb naturalnych niekwadratowych

$$(2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \cdots).$$

Mówić będziemy, że dwa ciągi F i G są *komplementarne* lub, że *się wzajemnie uzupełniają*, jeśli należą do zbioru $\mathcal{M}$ oraz jeden z nich jest uzupełnieniem drugiego.

Powtórzmy jeszcze raz. Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami. Mówimy, że ciągi te są *komplementarne* (ang. *complementary sequences*), jeśli spełniają następujące trzy warunki:

(1) są ściśle rosnące,

(2) nie mają wspólnych wyrazów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cap G(\mathbb{N}) = \emptyset$;

(3) każda liczba naturalna jest wyrazem jednego z tych ciągów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Ciągi $F = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ i $G = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, odpowiednio liczb nieparzystych i parzystych, są komplementarne. Ciągi

$$F = (3, 6, 9, 12, \dots) \quad \text{i} \quad G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots),$$

liczb naturalnych odpowiednio podzielnych i niepodzielnych przez 3, są komplementarne. Ciągi

$$F = (1, 4, 9, 16, 25, \dots) \quad \text{i} \quad G = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots),$$

liczb odpowiednio kwadratowych i niekwadratowych, są komplementarne. Tego rodzaju prostych przykładów jest bardzo dużo. Spójrzmy jeszcze raz na ciągi komplementarne

$$F = (3, 6, 9, 12, \dots) \quad \text{i} \quad G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots).$$

Mamy tu: $F(n) = 3n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Czy można w jakiś podobny sposób wyrazić $G(n)$? Jaki jest wzór na n-ty wyraz ciągu G ? Taki wzór można podać:

$$G(n) = n + \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby rzeczywistej x. Część całkowita będzie się tu pojawiać bardzo często. Rozpatrzmy to samo zagadnienie dla ciągów komplementarnych

$$F = (1, 4, 9, 16, 25, \dots) \quad \text{i} \quad G = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots),$$

liczb odpowiednio kwadratowych i niekwadratowych. W tym przypadku $F(n) = n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jaki jest wzór na n-ty wyraz ciągu G ? Można wykazać, że

$$G(n) = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

W tym rozdziale przedstawimy pewną metodę dowodzenia tego rodzaju faktów.

Wspomniane przykłady ciągów F i G były dość proste. Ciągi oznaczane przez G były uzupełnieniami odpowiednich ciągów oznaczanych przez F i dzięki temu wiedzieliśmy, że ciągi F, G są komplementarne. Czasem bywa jednak tak, że odpowiedź na pytanie czy dane dwa ciągi F, G są komplementarne, sprawia kłopoty. Ciągi $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, określone na przykład równościami

$$F(n) = n + [e^n], \quad G(n) = n + [\ln n],$$

są komplementarne. Fakt ten wymaga jednak pewnego uzasadnienia. Podobnie jest z ciągami

$$F(n) = \frac{n^2+n}{2}, \quad G(n) = n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

Są to też ciągi komplementarne. W tym rozdziale podamy więcej tego typu przykładów. Przedstawimy również (wraz z dowodem) znane twierdzenie Lambeka i Mosera, z 1954 roku, o strukturze ciągów komplementarnych.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.1 Ciąg $\mathbf{f}^*$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że $\mathcal{A}$ jest zbiorem wszystkich niemalejących i nieograniczonych ciągów, których wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Z każdym ciągiem $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, należącym do zbioru $\mathcal{A}$, stowarzyszymy w jednoznaczny sposób nowy ciąg, którego oznaczać będziemy przez f^*. Ten nowy ciąg będzie funkcją z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}_0$. Definiujmy ten ciąg następująco:

$$f^*(n) = \left|\left\{a \in \mathbb{N};\ f(a) < n\right\}\right|$$

dla $n \in \mathbb{N}$, tzn. $f^*(n)$ jest liczbą wszystkich wyrazów ciągu f mniejszych od n.

Spójrzmy na ciąg

$$f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots).$$

Nie ma w tym ciągu wyrazów mniejszych od 1. Zatem $f^*(1) = 0$. Nie ma wyrazów mniejszych od 2 i nie ma mniejszych od 3. Zatem $f^*(2) = 0$ oraz $f^*(3) = 0$. Jest jeden wyraz (mianowicie $f_1 = 3$) mniejszy od 4. Mamy więc $f^*(4) = 1$. Podobnie: $f^*(5) = 1$, $f^*(6) = 2$. Dla przykładu $f^*(11) = 4$, gdyż w ciągu f są dokładnie 4 wyrazy mniejsze od 11; są to: $f_1 = 3$, $f_2 = 5$, $f_3 = 7$ oraz $f_4 = 9$. Mamy więc:

$$f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots), \quad f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots).$$

2.1.1. *Następne przykłady:*

$$\begin{aligned}
f &= (1, 2, 3, 4, 5, \dots), & f^* &= (0, 1, 2, 3, 4, \dots);\\
f &= (1, 3, 5, 7, 9, \dots), & f^* &= (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots);\\
f &= (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots), & f^* &= (1, 3, 5, 7, \dots);\\
f &= (0, 2, 4, 6, 8, \dots), & f^* &= (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots);\\
f &= (3, 6, 9, 12, 15, \dots), & f^* &= (0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots).
\end{aligned}$$

Przedstawimy teraz kilka podstawowych własności ciągu f^*. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k, zachodzą oczywiste równoważności:

2.1.2. $$f^*(n) = 0 \iff n \leqslant f(1).$$

$$\boxed{f^*(n) = k \iff f(k) < n \leqslant f(k+1)}\,.$$

2.1.3. *Ciąg f^* jest niemalejący, nieograniczony i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Innymi słowy, jeśli $f \in \mathcal{A}$, to $f^* \in \mathcal{A}$.*

D. Jest oczywiste, że ciąg f^* jest niemalejący i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Przypuśćmy, że ciąg f^* jest ograniczony. Istnieje wtedy taka nieujemna liczba całkowita p, że $f^*(n) = p$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby naturalnej n_0. Wówczas

$$n \leqslant f(p+1) \quad \text{dla} \quad n > n_0$$

(patrz 2.1.2), a to oznacza, że zbiór wszystkich liczb naturalnych, większych od n_0, jest ograniczony z góry przez liczbę $f(p+1)$; sprzeczność. ⊠

Z powyższego stwierdzenia wynika, że jeśli $f \in \mathcal{A}$, to istnieje również ciąg

$$f^{**} = (f^*)^*$$

i stąd dalej, że istnieją ciągi f^{***}, f^{****}, itd. Powróćmy do rozpatrywanego wcześniej przykładu: $f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$, $f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$. Mamy tu

$$f^{**} = (3, 5, 7, 9, 11, \dots).$$

W tym przypadku zachodzi równość $f^{**} = f$. Wykażemy, że tak jest zawsze.

2.1.4. *Jeśli $f \in \mathcal{A}$, to* $\boxed{f^{**} = f}\,.$

D. Niech $g = f^*$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Należy udowodnić, że $g^*(n) = f(n)$. Oznaczmy: $p = g^*(n)$.

Załóżmy najpierw, że $p = 0$. W tym przypadku

$$n \leqslant g(1) = f^*(1)$$

i wobec tego $f^*(1)$ jest liczbą naturalną. Niech $m = f^*(1)$. Wtedy $n \leqslant m$ oraz $f(m) < 1$. Zatem $f(m) = 0$ i stąd $f(n) = 0$ (gdyż funkcja f jest niemalejąca). Jeśli więc $p = 0$, to $f(n) = 0 = g^*(n)$.

Niech teraz $p \geqslant 1$. Oznaczmy: $u = f^*(p)$, $\quad v = f^*(p+1)$. Z równoważności 2.1.2 wynika, że $g(p) < n \leqslant g(p+1)$, czyli

$$f^*(p) < n \leqslant f^*(p+1),$$

a więc $u < n \leqslant v$. Mamy ponadto:

$$< p \leqslant f(u+1), \qquad f(v) < p+1 \leqslant f(v+1).$$

Ponieważ $u + 1 \leqslant n \leqslant v$ oraz ciąg f jest niemalejący, więc

$$f(u+1) \leqslant f(n) \leqslant f(v).$$

Z tych nierówności otrzymujemy: $f(n) \leqslant f(v) < p+1$, więc $f(n) \leqslant p$ oraz

$$p \leqslant f(u+1) \leqslant f(n),$$

czyli $p \leqslant f(n)$. Zatem $f(n) = p = g^*(n)$. ⊠

Przedstawmy teraz kilka następnych własności ciągów postaci f^*.

2.1.5. *Niech $f \in \mathcal{A}$ i niech $m, n \in \mathbb{N}$. Jeśli $f(m) < n$, to $f^*(n) \geqslant m$.*

D. Oznaczmy $g = f^*$ i niech $b = g(n)$. Wtedy $n \leqslant f(b+1)$, stąd $f(m) < n \leqslant f(b+1)$ i stąd $m < b+1$ (ponieważ funkcja f jest niemalejąca). Zatem $m < g(n)+1$, czyli $m \leqslant f^*(n)$. ⊠

2.1.6. *Niech $f \in \mathcal{A}$. Nie ma takich liczb naturalnych m, n, dla których zachodzą jednocześnie dwie nierówności $f(m) \geqslant n$ oraz $f^*(n) \geqslant m$.*

D. Przypuśćmy, że takie liczby naturalne m, n istnieją. Oznaczmy: $g = f^*$, $a = f(m)$, $b = g(n)$. Mamy wtedy $a \geqslant n$, $b \geqslant m$ oraz $g^* = f$ (patrz 2.1.4) i z równoważności 2.1.2 otrzymujemy nierówności

$$g(a) < m \leqslant g(a+1), \quad f(b) < n \leqslant f(b+1).$$

Zatem $f(b) < n \leqslant a = f(m)$ i stąd $b < m$ (ponieważ funkcja f jest niemalejąca). Otrzymaliśmy sprzeczność; założyliśmy bowiem, że $b \geqslant m$. To kończy dowód.

Do sprzeczności można również dojść innym sposobem. Mamy $g(a) < m \leqslant b = g(n)$, więc $a < n$ (ponieważ funkcja g jest niemalejąca), wbrew temu, że $a \geqslant n$. ⊠

2.1.7. *Niech $f \in \mathcal{A}$. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi dokładnie jedna z nierówności:*

$$f(m) < n \quad \textit{lub} \quad f^*(n) < m.$$

D. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Jeśli $f(m) < n$, to $f^*(n) \geqslant m$ (patrz 2.1.5). Jeśli natomiast $f(m) \geqslant n$, to - na mocy 2.1.6 - mamy nierówność $f^*(n) < m$. ⊠

2.1.8. *Jeśli $f \in \mathcal{A}$, to dokładnie jedna z liczb $f(1)$, $f^*(1)$ jest równa zero.*

D. Zastosujmy 2.1.7 dla $m = n = 1$. Zachodzi dokładnie jedna z nierówności $f(1) < 1$ lub $f^*(1) < 1$. Zachodzi więc dokładnie jedna z równości $f(1) = 0$ lub $f^*(1) = 0$. ⊠

2.1.9. *Jeśli $f \in \mathcal{A}$, to $f^*(n) \neq f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

D. Przypuśćmy, że istnieje taka liczba naturalna n, dla której zachodzi równość $f^*(n) = f(n)$. Jeśli $f(n) < n$, to (patrz 2.1.5) $f^*(n) \geqslant n$ i wtedy mamy sprzeczność. Jeśli natomiast $f(n) \geqslant n$, to $f^*(n) < n$ i znowu otrzymujemy sprzeczność. ⊠

2.1.10. *Niech f będzie taką funkcją należącą do zbioru $\mathcal{A}$, że $f^*(1) \geqslant 1$. Oznaczmy:*

$$a_n = f^*(n) \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $a_1, a_2, a_3, \dots$ są liczbami naturalnymi i dla każdej liczby naturalnej n mamy:

(1) $f(a_n) < n$;
(2) $f(a_n + 1) \geqslant n$;
(3) $f(a_n + 1) > f(a_n)$;
(4) $a_{f(n)} < n$, *gdy* $f(n) \geqslant 1$;
(5) $f(1) = f(2) = \cdots = f(a_1) = 0$ *oraz* $f(a_1 + 1) > 0$;
(6) *Jeśli* $a_{n+1} > a_n$, *to* $f(a_n + 1) = f(a_n + 2) = \cdots = f(a_{n+1}) = n$.

D. Przez U_n oznaczać będziemy zbiór tych wszystkich liczb naturalnych b, dla których zachodzi nierówność $f(b) < n$. Wiemy, że $a_n = f^*(n) = |U_n|$, a zatem

$$U_n = \Big\{1, 2, \dots, a_n\Big\}.$$

W szczególności, $a_n \in U_n$ oraz $a_n + 1 \notin U_n$, więc $f(a_n) < n$ oraz $f(a_n+1) \geqslant n$ i ponadto, $f(a_n+1) > f(a_n)$, gdyż

$$f(a_n + 1) \geqslant n > f(a_n).$$

W ten sposób wykazaliśmy własności $(1), (2)$ i (3). Ponieważ $f(n) \geqslant f(n)$, więc (na mocy 2.1.6) $f^*(f(n)) < n$, czyli $a_{f(n)} < n$ o ile $f(n) \in \mathbb{N}$; mamy więc własność (4). Następna własność (5) jest oczywista.

Załóżmy, że $a_{n+1} > a_n$. Wtedy z (2) i (3) mamy nierówności

$$n \leqslant f(a_n+1) \leqslant f(a_n+2) \leqslant \dots \leqslant f(a_{n+1}) < n+1,$$

z których wynika własność (6). ⊠

2.1.11. *Niech h będzie dowolnym ciągiem o wyrazach naturalnych i niech f, g będą takimi ciągami należącymi do zbioru $\mathcal{A}$, że*

$$f^*(n) = f(n) + h(n), \quad g^*(n) = g(n) + h(n) \quad dla \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $f = g$.

D. Z założeń wynika, że $f^*(1) \geqslant 1$ i $g^*(1) \geqslant 1$. Możemy więc korzystać z własności podanych w 2.1.10. Oznaczmy: $a_n = f^*(n)$, $b_n = g^*(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy (metodą indukcji matematycznej), że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą następujące równości:

$$(r) \qquad \begin{cases} a_n = b_n \quad \text{oraz} \\ f(i) = g(i) \;\; \text{dla} \;\; i \leqslant a_n. \end{cases}$$

Ponieważ $f(1) = 0$ oraz $g(1) = 0$ (patrz 2.1.10), więc $a_1 = b_1$, gdyż

$$a_1 = f(1) + h(1) = h(1) = g(1) + h(1) = b_1.$$

Ponadto, $f(i) = g(i) = 0$ dla wszystkich $i \leqslant a_1$. Jest więc jasne, że równości (r) zachodzą dla $n = 1$.

Załóżmy teraz, że $n \geqslant 1$ jest taką liczbą naturalną, dla której zachodzą równości (r) i rozpatrzmy dwa przypadki.

`Przypadek 1`. Załóżmy, że $n+1 \leqslant a_n$. W tym przypadku $f(n+1) = g(n+1)$ (ponieważ $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_n$) i wobec tego $a_{n+1} = f(n+1)+h(n+1) = g(n+1)+h(n+1) = b_{n+1}$. Mamy więc równość $a_{n+1} = b_{n+1}$.

Przypomnijmy, że $a_{n+1} \geqslant a_n$. Jeśli $a_{n+1} = a_n$, to $b_{n+1} = b_n$ (gdyż $b_{n+1} = a_{n+1} = a_n = b_n$) i wtedy $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_{n+1}$.

Jeśli natomiast $a_{n+1} > a_n$, to $b_{n+1} > b_n$ (gdyż $b_{n+1} = a_{n+1}$ oraz $b_n = a_n$) i wtedy (patrz 2.1.10) zachodzą równości

$$f(a_n+1) = f(a_n+2) = \dots = f(a_{n+1}) = n = g(b_n+1) = g(b_n+2) = \dots = g(b_{n+1}),$$

a zatem $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_{n+1}$. Wykazaliśmy, że - w rozważanym przypadku - dla liczby $n+1$ zachodzą równości (r).

`Przypadek 2`. Załóżmy, że $n+1 > a_n$. W tym przypadku a_{n+1} jest ostro większe od a_n. Istotnie:

$$a_{n+1} = f(n+1) + h(n+1) \leqslant f(a_n+1) + h(n+1) \leqslant n + h(n+1) \leqslant n+1 > a_n.$$

Wykorzystaliśmy nierówność $f(a_n + 1) \leqslant n$, podaną w 2.1.10(2). Zauważmy, że wykazaliśmy więcej:

$$a_{n+1} \geqslant n + 1 > a_n.$$

Ponieważ $b_n = a_n$, więc mamy również nierówność $n + 1 > b_n$, z której wynika (co wykazujemy tak samo jak powyżej), że $b_{n+1} \geqslant n + 1 > b_n$. Korzystamy z 2.1.10(6) i mamy:

$$f(a_n + 1) = f(a_n + 2) = \cdots = f(a_{n+1}) = n = g(b_n + 1) = g(b_n + 2) = \cdots = g(b_{n+1}).$$

Ale $a_n + 1 \leqslant n + 1 \leqslant a_{n+1}$ oraz $b_n + 1 \leqslant n + 1 \leqslant b_{n+1}$, więc $f(n + 1) = n = g(n + 1)$ i wobec tego $a_{n+1} = b_{n+1}$, gdyż $a_{n+1} = f(n+1) + h(n+1) = g(n+1) + h(n+1) = b_{n+1}$. Ponadto $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_{n+1}$. Zatem, w rozważanym przypadku, dla liczby $n + 1$ również zachodzą równości (r).

W ten sposób wykazaliśmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości (r). Dla każdej więc liczby naturalnej n mamy: $f(n) = a_n - h(n) = b_n - h(n) = g(n)$, a więc $f = g$. ⊠

2.1.12. *Dla każdego niemalejącego ciągu h, o wyrazach naturalnych, istnieje dokładnie jeden taki ciąg $f \in \mathcal{A}$, że*

$$f^*(n) = f(n) + h(n)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

D. Dla każdej liczby naturalnej n zdefiniujemy parę (a_n, f_n), w której a_n będzie liczbą naturalną, f_n będzie niemalejącą funkcją ze zbioru U_n do zbioru $\mathbb{N}_0$, gdzie $U_n = \{1, 2, \ldots, a_n\}$ i spełnione będą następujące warunki:

$$(w)\quad \begin{cases} (a) & a_n \geqslant n; \\ (b) & f_n(a_n) < n; \\ (c) & a_n = f_n(n) + h(n); \\ (d) & \text{jeśli } \ n \geqslant 2, \ \text{to;} \\ & \quad (d_1) \quad a_{n-1} \leqslant a_n, \\ & \quad (d_2) \quad f_n(i) = f_{n-1}(i) \ \text{ dla } \ i \in U_{n-1}; \\ & \quad (d_3) \quad \text{jeśli dodatkowo } a_{n-1} < a_n, \ \text{ to } f_n(i) = n - 1 \ \text{ dla } \ i \in A_n \setminus A_{n-1}. \end{cases}$$

Pary te zdefiniujemy w sposób indukcyjny.

Konstrukcja pary (a_1, f_1). Przyjmujemy, że $a_1 = h(1)$ oraz

$$f_1(1) = f_1(2) = \cdots = f_1(a_1) = 0.$$

Wtedy oczywiście $a_1 \geqslant 1$, $f_1(a_1) < 1$ oraz $a_1 = f(1) + h(1)$. Dla $n = 1$ spełnione są więc wszystkie warunki oznaczone przez (w).

Konstrukcja pary (a_2, f_2). Zachodzić mogą dwa następujące przypadki.

`Przypadek 1`. Załóżmy, że $2 \leqslant a_1$. W tym przypadku przyjmujemy, że

$$a_2 = h(2).$$

Ponieważ ciąg h jest niemalejący, więc $a_2 \geqslant a_1$ (bo $a_2 = h(2) \geqslant h(1) = a_1$). Ponadto, $a_2 \geqslant 2$ (gdyż $a_2 \geqslant a_1 \geqslant 2$). Definiujemy funkcję $f_2 : U_2 \to \mathbb{N}_0$, przyjmując:

$$f_2(i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \ i \in U_1, \\ 1, & \text{gdy } \ i \in U_2 \setminus U_1. \end{cases}$$

Jest jasne, że funkcja f_2 jest niemalejąca oraz, że $f_2(a_2) < 2$. W rozważanym przypadku liczba 2 należy do zbioru U_1. Zatem $f_2(2) = 0$ i wobec tego

$$a_2 = h(2) = f_2(2) + h(2).$$

Mamy więc parę (a_2, f_2) spełniającą warunki (w).

`Przypadek 2.` Załóżmy, że $2 > a_1$. W tym przypadku a_1 jest równe 1. Przyjmujemy:

$$a_2 = 1 + h(2).$$

Mamy wtedy: $a_2 \geqslant 2$ oraz $a_2 > a_1$. Funkcję $f_2 : U_2 \to \mathbb{N}_0$ definiujemy tak samo jak powyżej, tzn.

$$f_2(i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \; i \in U_1, \\ 1, & \text{gdy } \; i \in U_2 \smallsetminus U_1. \end{cases}$$

Jest jasne, że funkcja f_2 jest niemalejąca oraz, że $f_2(a_2) < 2$. W rozważanym przypadku liczba 2 nie należy do zbioru U_1; należy natomiast do zbioru U_2. Zatem $f_2(2) = 1$ i wobec tego

$$a_2 = 1 + h(2) = f_2(2) + h(2).$$

Mamy więc parę (a_2, f_2) spełniającą warunki (w).

Krok indukcyjny. Niech $n \geqslant 2$ i załóżmy, że zdefiniowane są pary $(a_1, f_1), (a_2, f_2), \ldots, (a_n, f_n)$ spełniające odpowiednie warunki (w). Zdefiniujemy parę $\Big(a_{n+1},\ f_{n+1}\Big)$. W tym celu rozpatrzmy dwa następujące przypadki.

`Przypadek 1.` Załóżmy najpierw, że $n+1 \leqslant a_n$. W tym przypadku $n+1 \in U_n$ i wobec tego wiemy co to jest $f_n(n+1)$. Definiujemy:

$$a_{n+1} = f_n(n+1) + h(n+1).$$

Ponieważ funkcje f_n i h są niemalejące, więc

$$a_{n+1} = f_n(n+1) + h(n+1) \geqslant f_n(n) + h(n) = a_n \geqslant n+1,$$

a zatem $a_{n+1} \geqslant a_n$ oraz $a_{n+1} \geqslant n+1$. Definiujemy funkcję $f_{n+1} : U_{n+1} \to \mathbb{N}_0$, przyjmując:

$$f_{n+1}(i) = \begin{cases} f_n(i), & \text{gdy } \; i \in U_n, \\ \quad n, & \text{gdy } \; i \in U_{n+1} \smallsetminus U_n. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że $U_{n+1} = \{1, 2, \ldots, a_{n+1}\}$. Jeśli $a_{n+1} = a_n$, to $U_{n+1} = U_n$ i wtedy funkcje f_n i f_{n+1} są identyczne; w szczególności wtedy funkcja f_{n+1} jest niemalejąca oraz

$$f_{n+1}(a_{n+1}) = f_n(a_n) < n < n+1.$$

Jeśli natomiast $a_{n+1} > a_n$, to funkcja f_{n+1} jest również niemalejąca, gdyż wtedy

$$f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) < n = f_{n+1}(a_n+1) = f_{n+1}(a_n+2) = \cdots = f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Ponadto, $f_{n+1}(a_{n+1}) \leqslant n < n+1$ oraz

$$a_{n+1} = f_n(n+1) + h(n+1) = f_{n+1}(n+1) + h(n+1).$$

W rozważanym przypadku para $(a_{n+1},\ f_{n+1})$ spełnia więc warunki (w).

`Przypadek 2.` Załóżmy, że $n+1 > a_n$. Przyjmujemy:

$$a_{n+1} = n + h(n+1).$$

Mamy wtedy $a_{n+1} \geqslant n+1 > a_n$, a zatem $a_{n+1} \geqslant n+1$ oraz $a_{n+1} > a_n$. Funkcję $f_{n+1} : U_{n+1} \to \mathbb{N}_0$ definiujemy tak samo jak powyżej, tzn.

$$f_{n+1}(i) = \begin{cases} f_n(i), & \text{gdy} \quad i \in U_n, \\ \quad n, & \text{gdy} \quad i \in U_{n+1} \smallsetminus U_n. \end{cases}$$

Jest jasne, że funkcja f_n jest niemalejąca oraz, że $f_{n+1}(a_{n+1}) < n+1$. W rozważanym przypadku liczba $n+1$ nie należy do zbioru U_n; należy natomiast do zbioru U_{n+1}. Zatem $f_{n+1}(n+1) = n$ i wobec tego

$$a_{n+1} = n + h(n+1) = f_{n+1}(n+1) + h(n+1).$$

Mamy więc parę (a_{n+1}, f_{n+1}) spełniającą warunki (w). Tym samym zakończyliśmy indukcyjną konstrukcję par postaci (a_n, f_n).

Zdefiniowaliśmy ciąg par $(a_n,\ f_n)$, spełniających warunki (w). Mamy zatem niemalejący ciąg liczb naturalnych (a_n) i to taki, że $a_n \geqslant n$ dla wszystkich n. Ciąg (a_n) jest więc nieograniczony.

Rozważmy teraz funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ zdefiniowaną następująco. Niech $x \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy:

$$f(x) = n - 1,$$

gdzie n jest najmniejszą taką liczbą naturalną, że $x \leqslant a_n$. W szczególności, jeśli $x \leqslant a_1$, to $f(x) = 0$. Jeśli natomiast $a_s < x \leqslant a_{s+1}$, gdzie $s \in \mathbb{N}$, to $f(x) = s$. Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że

$$f(x) = f_n(x),$$

dla wszystkich liczb naturalnych n takich, że $x \leqslant a_n$. W szczególności $f(n) = f_n(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ (gdyż $n \leqslant a_n$). Ponieważ każda funkcja postaci f_n jest niemalejąca, więc funkcja f jest również niemalejąca. Jest ponadto jasne, że funkcja f jest nieograniczona. Zatem funkcja f należy do zbioru $\mathcal{A}$.

Mamy ponadto, $f(a_n) = f_n(a_n) < n$ oraz

$$f(a_n + 1) = f_{n+1}(a_n + 1) = n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdej więc liczby naturalnej n zachodzi równość

$$f^*(n) = a_n.$$

Ale $a_n = f_n(n) + h(n) = f(n) + h(n)$, zatem $f^*(n) = f(n) + h(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. W ten sposób wykazaliśmy, że istnieje ciąg f należący do $\mathcal{A}$ i spełniający równość

$$f^*(n) = f(n) + h(n).$$

To, że taki ciąg jest tylko jeden, wynika z twierdzenia 2.1.11. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.2 Przykłady ciągów postaci f*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpoczynamy od przykładu dotyczącego liczb pierwszych. Niech $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych:

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \cdots .$$

Jest to ciąg niemalejący, nieograniczony i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Ciąg ten należy zatem do zbioru $\mathcal{A}$ i wobec tego istnieje ciąg $p^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, określony równościami

$$p^*(n) = \left| \Big\{ a \in \mathbb{N};\ p(a) < n \Big\} \right|$$

dla $n \in \mathbb{N}$, tzn. $p^*(n)$ jest liczbą wszystkich liczb pierwszych mniejszych n. Liczbę wszystkich liczb pierwszych nie większych od danej liczby rzeczywistej x oznacza się przez $\pi(x)$. Mamy zatem:

2.2.1. $p^*(n) = \pi(n-1)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Następny przykład dotyczy potęg liczby e i logarytmów naturalnych.

2.2.2. *Jeśli* $f(n) = \left[e^n\right]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $f^*(n) = \left[\ln n\right]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$, czyli

$$\left[e^k\right] + 1 \leqslant n \leqslant \left[e^{k+1}\right] \leqslant e^{k+1}$$

i stąd $e^k < n \leqslant e^{k+1}$. Ale $e^{k+1} \notin \mathbb{N}$, więc $e^k < n < e^{k+1}$ i wobec tego $k < \ln n < k+1$. Zatem, $[\ln n] = k = f^*(n)$. ⊠

W tym dowodzie istotne było tylko to, że potęga naturalna liczby e nie jest liczbą naturalną. W ten sam sposób dowodzimy:

2.2.3. *Niech* a *będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, której każda naturalna potęga nie jest liczbą naturalną* (*na przykład niech* a *będzie dodatnią liczbą przestępną*). *Jeśli* $f(n) = [a^n]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$f^*(n) = [\log_a n]$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

2.2.4. *Jeśli* x *jest dodatnią liczbą niewymierną oraz* $f(n) = [nx]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $f^*(n) = \left[x^{-1}n\right]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ czyli $[kx] + 1 \leqslant n \leqslant [(k+1)x]$ i stąd $kx < n \leqslant (k+1)x$. Ponieważ liczba x jest niewymierna, więc $n < (k+1)x$ i wobec tego

$$k < \frac{n}{x} < k+1.$$

Zatem $\left[x^{-1}n\right] = k = f^*(n)$. ⊠

2.2.5. *Niech* $s \geqslant 2$ *będzie liczbą naturalną i niech* $f(n) = sn$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$f^*(n) = \left[\frac{n-1}{s}\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$sk + 1 \leqslant n \leqslant s(k+1),$$

$$sk \leqslant n - 1 \leqslant s(k+1) - 1 < s(k+1),$$

$$k \leqslant \frac{n-1}{s} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\dfrac{n-1}{s}\right]$. ⊠

2.2.6. *Niech* $2 \leqslant a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ *oraz* $f(n) = an + b$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$f^*(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \leqslant a+b, \\ \left[\dfrac{n-b-1}{a}\right], & \text{gdy } n > a+b. \end{cases}$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Jeśli $n \leqslant a + b$, to $n \leqslant f(1)$ i wtedy $k = 0$ (patrz 2.1.2). Załóżmy, że $n > a + b$. Wtedy $k \geqslant 1$ i mamy kolejno:

$$f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1),$$
$$ak + b + 1 \leqslant n \leqslant a(k+1) + b,$$
$$ak \leqslant n - b - 1 \leqslant a(k+1) - 1 < a(k+1),$$
$$k \leqslant \frac{n-b-1}{a} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\dfrac{n-b-1}{a}\right]$. ⊠

Teraz rozpatrzymy kilka przykładów funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ postaci $f(n) = an^2 + bn + c$.

2.2.7. *Jeśli* $f(n) = n^2$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n-1}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$k^2 + 1 \leqslant n \leqslant (k+1)^2,$$
$$k^2 \leqslant n - 1 \leqslant (k+1)^2 - 1 < (k+1)^2,$$
$$k \leqslant \sqrt{n-1} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{n-1}\right]$. ⊠

2.2.8. *Jeśli* $f(n) = n^2 - n$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$k^2 - k + 1 \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - (k+1) = k^2 + k,$$
$$k^2 + k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$
$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2,$$
$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2},$$
$$k < \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right]$. ⊠

Następne dwa przykłady dotyczą liczb trójkątnych, czyli liczb naturalnych postaci

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + n.$$

2.2.9. *Jeśli* $f(n) = t_n$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{2n-1} - \frac{1}{2}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $t_k + 1 \leqslant n \leqslant t_{k+1}$ i mamy kolejno:

$$\frac{k^2+k}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2},$$
$$k^2 + k + 2 \leqslant 2n \leqslant k^2 + 3k + 2,$$
$$k^2 + k + 1 \leqslant 2n - 1 \leqslant k^2 + 3k + 1,$$
$$k^2 + k + \frac{1}{4} < 2n - 1 < k^2 + 3k + \frac{9}{4},$$
$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 < 2n - 1 < \left(k + \frac{3}{2}\right)^2,$$
$$k + \frac{1}{2} < \sqrt{2n-1} < k + \frac{3}{2},$$
$$k < \sqrt{2n-1} - \frac{1}{2} < k + 1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{2n-1} - \frac{1}{2}\right]$. ⊠

2.2.10. *Jeśli* $f(n) = \dfrac{n^2 - n}{2}$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$\frac{k^2-k}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \frac{(k+1)^2-(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2},$$
$$k^2 - k + 2 \leqslant 2n \leqslant k^2 + k,$$
$$k^2 - k + \frac{1}{4} \leqslant 2n \leqslant k^2 + k + \frac{1}{4},$$
$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2,$$
$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2},$$
$$k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$. ⊠

Zanotujmy jeszcze następujące uogólnienie przykładu 2.2.7.

2.2.11. *Niech* $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $f(n) = n^s$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt[s]{n-1}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$k^s + 1 \leqslant n \leqslant (k+1)^s,$$
$$k^s \leqslant n - 1 \leqslant (k+1)^s - 1 < (k+1)^s,$$
$$k \leqslant \sqrt[s]{n-1} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt[s]{n-1}\right]$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.3 Ciągi komplementarne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami. Przypomnijmy, że ciągi te są *komplementarne* (ang. *complementary sequences*), jeśli spełniają następujące trzy warunki:

(1) są ściśle rosnące,

(2) nie mają wspólnych wyrazów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cap G(\mathbb{N}) = \emptyset$;

(3) każda liczba naturalna jest wyrazem jednego z tych ciągów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Ciągi $F = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ i $G = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, odpowiednio liczb nieparzystych i parzystych, są komplementarne. Ciągi $F = (3, 6, 9, 12, \dots)$ i $G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots)$, liczb naturalnych odpowiednio podzielnych i niepodzielnych przez 3, są komplementarne. Ciągi $F = (1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ i $G = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots)$, liczb odpowiednio kwadratowych i niekwadratowych, są komplementarne. Tego rodzaju przykładów jest bardzo dużo.

Ciągi komplementarne można w pewien sposób konstruować za pomocą dowolnego ciągu f, należącego do zbioru $\mathcal{A}$. Rozpatrzmy dla przykładu ciąg $f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$. W tym przypadku $f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$. Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami określonymi równościami:

$$F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. W naszym przypadku są to ciągi:

$$F = (4, 7, 10, 13, 16, \dots), \quad G = (1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \dots).$$

Łatwo można sprawdzić, że powyższe ciągi F i G są komplementarne.

Okazuje się, że to nie jest przypadek. Dla każdego ciągu f, należącego do zbioru $\mathcal{A}$ (czyli ciągu, który jest niemalejący, nieograniczony i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi), ciągi F i G, zdefiniowane w powyższy sposób, są komplementarne. Co więcej, każda para ciągów komplementarnych jest takiej postaci. Udowodnili to, w 1954 roku, J. Lambek i L. Moser.

Zamierzamy przedstawić dowody wspomnianych wyników Lambeka i Mosera. W tym celu zanotujmy najpierw kilka początkowych obserwacji.

2.3.1. *Niech $h \in \mathcal{A}$ i niech*
$$H(n) = n + h(n)$$
dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg H jest ściśle rosnący.

D. $H(n) = n + h(n) < (n+1) + h(n) \leqslant (n+1) + h(n+1) = H(n+1)$. ⊠

2.3.2. *Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami komplementarnymi i niech*
$$f(n) = F(n) - n, \quad g(n) = G(n) - n,$$
dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciągi f, g należą do zbioru $\mathcal{A}$.

D. Wykażemy, że $f \in \mathcal{A}$. Ponieważ ciąg F jest ściśle rosnący, $F(n) \geqslant n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Każde więc $f(n)$ jest nieujemną liczbą całkowitą. Mamy ponadto:
$$f(n) = F(n) - n < F(n+1) - n = F(n+1) - (n+1) + 1 = f(n+1) + 1,$$
czyli $f(n) < f(n+1) + 1$, a więc $f(n) \leqslant f(n+1)$. Ciąg f jest więc niemalejący.

Przypuśćmy teraz, że ciąg f jest ograniczony. Istnieje wtedy taka nieujemna liczba całkowita a, że $f(n) = a$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby naturalnej n_0. Wtedy $F(n) = n + a$ dla wszystkich $n > n_0$. To oznacza, że wszystkie liczby naturalne, począwszy od liczby $(n_0 + a + 1)$, są wyrazami ciągu F. To implikuje, że ciąg G ma tylko skończenie wiele wyrazów, a to jest sprzeczne z tym, że G jest ściśle rosnącym ciągiem nieskończonym. Zatem ciąg f jest nieograniczony. Pokazaliśmy, że $f \in \mathcal{A}$. W podobny sposób wykazujemy, że $g \in \mathcal{A}$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.4 Twierdzenia Lambeka i Mosera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Teraz możemy już udowodnić następujące twierdzenia.

2.4.1 (Lambek, Moser, 1954). *Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami komplementarnymi. Istnieje wtedy dokładnie jeden taki ciąg f, należący do zbioru $\mathcal{A}$ (czyli ciąg niemalejący, nieograniczony, którego wyrazami są nieujemne liczby całkowite), że*
$$\boxed{F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n)},$$
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Mon] 61(1954) 454-458, [ME] 4(1)(1998) 2).

D. Oznaczmy: $f(n) = F(n) - n$ oraz $g(n) = G(n) - n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wiemy (patrz 2.3.2), że $f, g \in \mathcal{A}$. Wystarczy zatem udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej s zachodzi równość
$$g(s) = f^*(s).$$

Niech $s \in \mathbb{N}$. Niech $m = G(s)$. To oznacza, że w ciągu G występuje dokładnie s wyrazów mniejszych lub równych m, To oznacza również, że w ciągu F występuje dokładnie $m - s$ wyrazów mniejszych od m i przy tym m nie jest wyrazem tego ciągu. Oznaczmy przez r liczbę $m - s$. Jest oczywiste, że jeśli $r = 0$, to $f^*(s) = 0 = g(s)$.

Dalej załóżmy, że $r \geqslant 1$. W tym przypadku liczba naturalna $F(r)$ jest ostro większa od m i stąd wynika, że $f(r) < s$. Istotnie, $f(r) = F(r) - r < m - r = s$. Mamy ponadto,

$$f(r+1) = F(r+1) - (r+1) > m - (r+1) = m - r - 1 = s - 1,$$

więc $s \leqslant f(r+1)$. Wykazaliśmy, że

$$f(r) < s \leqslant f(r+1),$$

a zatem (na mocy 2.1.2) $f^*(s) = r$. Zauważmy, że $g(s) = G(s) - s = m - s = r$. Mamy więc oczekiwaną równość $g(s) = f^*(s)$. Wykazaliśmy więc, że $g = f^*$ i to kończy dowód tego twierdzenia. ⊠

2.4.2 (Lambek, Moser, 1954). *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ będzie niemalejącym i nieograniczonym ciągiem. Niech*

$$F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n), \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy ciągi F i G są komplementarne. ([Mon] 61(1954) 454-458, [ME] 4(1)(1998) 2.).

D. Wiemy już (patrz 2.3.1), że ciągi F i G są ściśle rosnące i wszystkie ich wyrazy są liczbami naturalnymi.

Pokażemy, że zbiory $F(\mathbb{N})$ i $G(\mathbb{N})$ są rozłączne. Przypuśćmy, że $F(n) = G(m)$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$. Niech $a = f^*(m)$. Wtedy

$$f(a) < m \leqslant f(a+1) \quad \text{oraz} \quad f(n) + n = a + m.$$

Zatem wtedy $f(a) + a < m + a \leqslant f(a+1) + a$ i stąd $F(a) < F(n) < F(a+1)$. Ciąg F jest ściśle rosnący, więc $a < n < a + 1$ i mamy sprzeczność.

Należy jeszcze wykazać, że $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. W tym celu wprowadźmy nowy ciąg

$$H : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

będący uzupełnieniem ciągu F, tzn. H jest ciągiem tych wszystkich kolejnych liczb naturalnych, które nie są wyrazami ciągu F.

Jest oczywiste, że ciąg H jest ściśle rosnący i ciągi F, H są komplementarne. W szczególności

$$F(\mathbb{N}) \cup H(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$

Z twierdzenia 2.4.1 wiemy, że istnieje taka funkcja $h \in \mathcal{A}$, że $F(n) = n + h(n)$ oraz $H(n) = n + h^*(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ale $h(n) = F(n) - n = f(n)$, więc $h = f$, $h^* = f^*$ i stąd

$$H(n) = n + h^a st(n) = n + f^*(n) = G(n).$$

Zatem, $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = F(\mathbb{N}) \cup H(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. ⊠

★ J. Lambek, L. Moser, *Inverse and complementary sequences of natural numbers*, [Mon] 61(1954) 454-458.

Yau Kwan Kiu Gary, *Inverse sequences and complementary sequences*, [ME] 3(4)(1997) 2.

A proof of the Lambek and Moser theorem, [ME] 4(1)(1998) 2.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.5 Zastosowania twierdzeń Lambeka i Mosera

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpatrzmy na początek ciągi komplementarne $F = (2, 4, 6, , \dots,)$ oraz $G = (1, 3, 5, \dots)$. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że istnieje taki ciąg $f \in \mathcal{A}$, że

$$F(n) = n + f(n) \quad \text{oraz} \quad G(n) = n + f^*(n).$$

Ponieważ $F(n) = 2n$, $G(n) = 2n - 1$, więc w tym przypadku $f(n) = F(n) - n = 2n - n = n$ oraz $f^*(n) = n - 1$. Mamy zatem równości:

$$f(1, 2, 3, 4, \dots), \quad f^* = (0, 1, 2, 3, \dots).$$

Równości te wynikają natychmiast z definicji ciągu f^*. Nie jest potrzebne w tym przypadku twierdzenie Lambeka-Mosera.

Niech $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, itd. Wiemy (patrz 2.2.1), że

$$p^*(n) = \pi(n - 1)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\pi(x)$ oznacza liczbę wszystkich liczb pierwszych nie większych od danej liczby rzeczywistej x. Z twierdzenia Lambeka-Mosera 2.4.2 wynika zatem, że jeśli

$$F(n) = n + p_n \quad \text{oraz} \quad G(n) = n + \pi(n - 1)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, to ciągi F, G są komplementarne. Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie.

2.5.1. *Niech (p_n) będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych i niech*

$$A = \Big\{n + p_n;\ n \in \mathbb{N}\Big\} \quad \textit{oraz} \quad B = \Big\{n + \pi(n - 1);\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{N}$ oraz $A \cap B = \emptyset$. ([Mon] 61(1954) 455).

Następny przykład dotyczy potęg pewnej liczby a i logarytmów. Z faktu 2.2.3 i twierdzenia 2.4.2 otrzymujemy:

2.5.2. *Niech a będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, której żadna naturalna potęga nie jest liczbą naturalną (na przykład niech a będzie dodatnią liczbą przestępną). Niech*

$$A = \Big\{n + [a^n];\ n \in \mathbb{N}\Big\} \quad \textit{oraz} \quad B = \Big\{n + [\log_a n];\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{N}$ oraz $A \cap B = \emptyset$.

Zanotujmy to samo dla $a = e$.

2.5.3. *Niech*

$$A = \Big\{n + [e^n];\ n \in \mathbb{N}\Big\} \quad i \quad B = \Big\{n + [\ln n];\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{N}$ oraz $A \cap B = \emptyset$. ([Mon] 61(1954) 455).

Niech teraz

$$F = (3, 6, 9, 12, \dots), \qquad G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots).$$

Ciąg F, to kolejne wielokrotności trójki. Ciąg G natomiast powstał przez skreślenie w ciągu kolejnych liczb naturalnych wszystkich liczb podzielnych przez 3. Ciąg G jest więc uzupełnieniem ciągu F. Chcemy znaleźć wzór na n-ty wyraz ciągu G. Chcąc to zrobić, zauważmy najpierw, że ciągi F i G są komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika zatem, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = 3n - n = 2n.$$

Do znalezienia szukanego wzoru wystarczy więc opisać funkcję f^*, gdzie $f = (2, 4, 6, 8, \dots)$. Wykazaliśmy (patrz 2.2.5), że $f^*(n) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. W ten sposób udowodniliśmy następujące stwierdzenie.

2.5.4. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy liczby podzielne przez* 3. *Mamy wtedy ciąg*

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ \dots,$$

którego n-ty wyraz jest równy

$$n + \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

W ten sam sposób otrzymujemy następne stwierdzenie.

2.5.5. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy liczby podzielne przez* 4. *Mamy wtedy ciąg*

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 18,\ \dots,$$

którego n-ty wyraz jest równy

$$n + \left[\frac{n-1}{3}\right].$$

Przedstawione stwierdzenia są szczególnymi przypadkami następującego wniosku z twierdzenia 2.4.1.

2.5.6. *Niech $d \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech G będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez d. Wtedy*

$$G(n) = n + \left[\frac{n-1}{d-1}\right], \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D. Oznaczmy przez F ciąg kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez d. Dany ciąg G jest uzupełnieniem ciągu F. Ciągi F i G są więc komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = dn - n = (d-1)n.$$

Wykazaliśmy (patrz 2.2.5), że $f^*(n) = \left[\frac{n-1}{d-1}\right]$. Zatem $G(n) = n + \left[\frac{n-1}{d-1}\right]$. ⊠

Inny dowód znajdziemy w drugim wydaniu książki [N10], w rozdziale o części całkowitej. Wyrazy powyższego ciągu G opisał w 2002 roku M.A. Nyblom za pomocą funkcji "sufit".

2.5.7 (M.A. Nyblom, [Nyb])**.** *Niech $d \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech G będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez d. Wtedy*

$$G(n) = n + \left\lceil \frac{n-1}{d-1} \right\rceil - 1, \quad dla \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.5.8. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy wszystkie liczby trójkątne. Mamy wtedy ciąg $2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \ldots$, którego n-ty wyraz jest równy*

$$n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right].$$

D. Oznaczmy przez F ciąg kolejnych liczb trójkątnych. Dany ciąg G jest uzupełnieniem ciągu F. Ciągi F i G są więc komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Wykazaliśmy (patrz 2.2.10), że $f^*(n) = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right]$. Zatem, $G(n) = n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right]$. ⊠

2.5.9. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy wszystkie liczby kwadratowe. Mamy wtedy ciąg $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \ldots$ (liczb niekwadratowych), którego n-ty wyraz jest równy*

$$n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right].$$

D. Oznaczmy przez F ciąg kolejnych liczb kwadratowych. Dany ciąg G jest uzupełnieniem ciągu F. Ciągi F i G są więc komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = n^2 - n.$$

Wykazaliśmy (patrz 2.2.8), że $f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$. Zatem, $G(n) = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$. ⊠

Inne dowody znajdziemy w drugim wydaniu książki [N10], w rozdziale dotyczącym części całkowitej. Pojawiły się liczby postaci

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right].$$

Liczby te można przedstawiać na różne inne sposoby. Zanotujmy kilka przykładów.

2.5.10. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości:*

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right] = \left[\sqrt{n + \sqrt{n}} \right] = \left[\sqrt{n + \left[\sqrt{n + [\sqrt{n}]} \right]} \right] = \left[\frac{1 + \sqrt{4n-2}}{2} \right] = \left[\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right].$$

([S59], [AnAF], [Nyb], [N10]).

2.5.11. *Jeśli q jest liczbą rzeczywistą taką, że $-\frac{3}{4} \leqslant q < \frac{1}{4}$, to*

$$\left[\sqrt{n+q} + \frac{1}{2} \right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right], \quad dla \ n \in \mathbb{N}. \quad \text{([N10])}.$$

2.5.12. *Niech* $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$. *Jeśli w ciągu wszystkich liczb naturalnych skreślimy wszystkie liczby postaci* a^m, *gdzie* $a \in \mathbb{N}$, *to w nowym ciągu liczba stojąca na* n*-tym miejscu jest równa*

$$n + \left[\sqrt[m]{n + \sqrt[m]{n}} \right].$$ ([Mon] 61(1954) 454-458, [Nyb], [N10]).

2.5.13. *Dla każdego niemalejącego ciągu* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *istnieje dokładnie jedna para ciągów komplementarnych* (F, G) *taka, że*

$$G = F + h.$$

D. Niech $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie danym niemalejącym ciągiem. Wiemy (patrz 2.1.12), że istnieje dokładnie jeden ciąg $f \in \mathcal{A}$ taki, że $f^* = f + h$. Definiujemy:

$$F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ciągi F, G są komplementarne (wynika to z twierdzenia 2.4.2) i mamy

$$G(n) = n + f^*(n) = n + f(n) + h(n) = F(n) + h(n),$$

czyli $G = F + h$. Wykazaliśmy istnienie pary (F, G). Udowodnimy jeszcze, że taka para jest tylko jedna.

Niech f, F, G będą takie jak powyżej i przypuśćmy, że (U, V) jest taką parą ciągów komplementarnych, że $V = U + h$. Niech $\varphi \in \mathcal{A}$ będzie takim ciągiem, że

$$U(n) = n + \varphi(n), \quad V(n) = n + \varphi^*(n)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Taki ciąg φ istnieje na mocy twierdzenia 2.4.1. Ponieważ $V = U + h$, więc $\varphi^* = \varphi + h$. Z jedyności podanej w twierdzeniu 2.1.12 wynika, że $\varphi = f$ i stąd wynika, że $V = G$ oraz $U = F$. ⊠

Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że istnieją jednoznacznie wyznaczone ciągi komplementarne F i G takie, że

$$G(n) = F(n) + n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Istnieją proste wzory na n-te wyrazy tych ciągów. Zajmiemy się tym dokładniej w następnym podrozdziale. Teraz zanotujmy dwa zadania.

2.5.14. *Wiemy z twierdzenia* 2.5.13, *że istnieją jednoznacznie wyznaczone takie ciągi komplementarne* F *i* G, *że*

$$G(n) = F(n) + 2n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Podać wzory na* n*-te wyrazy tych ciągów.*

2.5.15. *Wiemy z twierdzenia* 2.5.13, *że istnieją jednoznacznie wyznaczone takie ciągi komplementarne* F *i* G, *że*

$$G(n) = F(n) + n^2$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Podać wzory na* n*-te wyrazy tych ciągów.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.6 Zastosowania dla liczb postaci [xn]

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Załóżmy, że x jest liczbą niewymierną i niech

$$f(x) = [nx]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wiemy (patrz 2.2.4), że wtedy

$$f^*(n) = \left[x^{-1}n\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia 2.4.2 wynika zatem, że ciągi

$$F(n) = n + [xn] \quad \text{oraz} \quad G(n) = n + [x^{-1}n]$$

są komplementarne. Ale $n + [nx] = [pn]$, $n + \left[x^{-1}n\right] = [qn]$, gdzie $p = 1 + x$, $q = 1 + x^{-1}$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mamy zatem:

2.6.1 (Twierdzenie Beatty)**.** *Dla dowolnej liczby dodatniej p niech*

$$A_p = \left\{[np];\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Jeśli $p, q > 1$ są takimi liczbami niewymiernymi, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

to $A_p \cap A_q = \emptyset$ oraz $A_p \cup A_q = \mathbb{N}$. ([MR] 16.17a, [OM] Polska 1989, [Dlt] 8/1995).

Zauważmy również, że $q = \dfrac{p}{p-1}$. Udowodniliśmy więc:

2.6.2. *Niech $p > 1$ będzie liczbą niewymierną. Niech*

$$A = \left\{[np];\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\ [np/(p-1)]\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Wówczas $\mathbb{N}$ jest rozłączną sumą zbiorów A i B.

Można udowodnić:

2.6.3. *Niech $p > 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Niech*

$$A = \left\{[np];\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\ [np/(p-1)]\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Wówczas $\mathbb{N}$ jest rozłączną sumą zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy p jest liczbą niewymierną. ([IMO] Longlist 1984).

Zanotujmy dwa wnioski wynikające z 2.6.2.

2.6.4. *Jeśli*

$$A = \left\{[(1+\sqrt{3})n/2];\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \left\{[(\sqrt{3}+2)n];\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

to $\mathbb{N} = A \cup B$ *oraz* $A \cap B = \emptyset$.

D. Niech $p = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Wtedy $\dfrac{p}{p-1} = \sqrt{3}+2$ i teza wynika z 2.6.2. ⊠

2.6.5. *Niech* $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będą ciągami określonymi równościami*

$$F(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right], \quad G(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Ciągi te są komplementarne.* ([Kw] 11/1979 27).

D. Niech $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wtedy $\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ i teza wynika z 2.6.2. ⊠

Spójrzmy jeszcze raz na twierdzenie 2.5.13. Dla ciągu tożsamościowego $h(n) = n$ twierdzenie to ma nastąpującą postać.

2.6.6. *Istnieją takie jednoznacznie wyznaczone ciągi komplementarne* $F, G : \mathbb{N} \to N$, *że*

$$G(n) = F(n) + n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Kw] 6/1970 10).

Zauważmy, że ciągi F i G, podane w 2.6.5, spełniają równość $G(n) = F(n) + n$. Istotnie,

$$G(n) = \left[\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}n\right] = \left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n + n\right] = \left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] + n = F(n) + n.$$

Zanotujmy:

2.6.7. *Niech* $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będą ciągami określonymi równościami*

$$F(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right], \quad G(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Ciągi te są komplementarne. Są to jedyne ciągi komplementarne takie, że*

$$G(n) = F(n) + n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Kw] 11/1979 27).

2.6.8. *Początkowe wyrazy powyższych ciągów* F *i* G:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32
G	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52

2.6.9. *Niech* $F(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$, $\quad G(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy:*

(1) $G(n) = F\big(F(n)\big) + 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*;*

(2) $G(n) = F(n) + n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*;*

(3) $F(n+1) - F(n) = 1$ *lub* 2, *dokładniej*

$$F(n+1) - F(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \in G(\mathbb{N}), \\ 2, & \text{gdy } n \in F(\mathbb{N}). \end{cases}$$

([Kw] 11/1979 27).

★ M. Griffiths, *Dove-tail sequences*, [MG] 91(521)(2007) 300-302.

M. Griffiths, *The golden string, Zeckendorf representations, and the sum of a series*, [Mon] 118(6) (2011) 497-507.

I. M. Jagłom, *Systemy numeracji*, [Kw] 6/1970 2-10, [Kw] 12/1991 15-22.

3 Zbiory i rodziny ich podzbiorów

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną pewnych podzbiorów danego zbioru X. Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest:

łańcuchem, jeśli dla każdych dwóch zbiorów A i B, należących do tej rodziny, zachodzi $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$;

antyłańcuchem, jeśli dla każdych dwóch różnych zbiorów A i B, należących do tej rodziny, zachodzi $A \not\subseteq B$ i $B \not\subseteq A$;

przecinającą się, jeśli dla każdych dwóch zbiorów A i B, należących do tej rodziny, zachodzi $A \cap B \neq \emptyset$.

3.1 Podzbiory zbioru liczb naturalnych

3.1.1. *Rodzina $P(\mathbb{N})$, wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, jest częściowo uporządkowana przez relację zawierania. Czy istnieje w $P(\mathbb{N})$ łańcuch nieprzeliczalny ?* ([Dlt] 7/1993).

D. (K. Ciesielski, [Dlt] 7/1993, [CiCP] 80). Taki nieprzeliczalny łańcuch istnieje. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ będzie bijekcją (zbioru liczb naturalnych na zbiór liczb wymiernych). Dla liczby rzeczywistej r określmy zbiór

$$A_r = \Big\{ n \in \mathbb{N};\ f(n) \leqslant r \Big\}.$$

Jest oczywiste, że jeśli $r < s$, to $A_r \subset A_s$ oraz $A_r \neq A_s$. Rodzina $\mathcal{F} = \Big\{ A_r;\ r \in \mathbb{R} \Big\}$ jest nieprzeliczalnym łańcuchem w $P(\mathbb{N})$. ⊠

3.1.2. *Jeżeli A jest takim podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$, że*

$$\begin{cases} 1 \in A, \\ 2 \in A \quad \textit{oraz} \\ \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall}\ n \in A \Longrightarrow n + 2 \in A, \end{cases}$$

to $A = \mathbb{N}$.

3.1.3. *Jeżeli A jest takim podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$, że*

$$\begin{cases} 1 \in A, \\ 2 \in A, \\ 3 \in A \quad \textit{oraz} \\ \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall}\ n \in A \Longrightarrow n + 3 \in A, \end{cases}$$

to $A = \mathbb{N}$.

3.1.4. *Niech a i b będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Niech $S \subseteq \mathbb{N}$ będzie takim podzbiorem, że*

$$\begin{cases} a, b \in S \quad \textit{oraz} \\ \underset{x,y,x\in\mathbb{S}}{\forall} \; x+y+z \in S, \end{cases}$$

Wtedy każda liczba naturalna, większa lub równa $2ab$, należy do zbioru S. ([OM] Indie 1997).

3.1.5. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$,* $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$. *Mówimy, że podzbiór $S \subseteq \mathbb{N}_0$ jest* idealny, *jeśli*

(1) $0 \in S$,

(2) $\underset{x\in S}{\forall} \; a+x, b+x \in S.$

Ile jest takich idealnych podzbiorów? Odp. $\dfrac{1}{a+b}\dbinom{a+b}{a}$. ([IMO] Shortlist 2000, [Djmp] 308(663)).

3.1.6. *Mówimy, że podzbiór A zbioru $\{1, 2, \ldots, 11\}$ jest* dobry, *jeśli*

$$2k \in A \Longrightarrow 2k-1,\ 2k+1 \in A.$$

Ile dobrych podzbiorów ma zbiór $\{1, 2, \ldots, 11\}$? Odp. 233. ([Crux] 2000 s.145).

3.1.7. *Dla danej liczby naturalnej a definiujemy zbiór*

$$S_a = \Big\{ n \in \mathbb{N};\ a^2 \leqslant n < (a+1)^2 \Big\}.$$

Wykazać, że wszystkie liczby postaci xy, gdzie $x, y \in S_a$, są parami różne. ([OM] Indie 1998).

3.1.8. *Danych jest kilka parami różnych liczb naturalnych zawartych w przedziale postaci*

$$\Big[n^2,\ (n+1)^2 \Big],$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że wszystkie dwuczynnikowe iloczyny utworzone z tych liczb są również parami różne. ([OM] ZSRR 1983).

3.1.9. *Niech $a(n) = n^2 + n + 1$ i niech $S = \Big\{ a(n);\ n \in \mathbb{N} \Big\}$. Wykazać, że*

$$a(n)a(n+1) \in S$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Irlandia 2000).

3.1.10. *Niech $A = \Big\{ x^2 + y^3;\ x, y \in \mathbb{N} \Big\}$. Wtedy:*

(1) *zbiór $\mathbb{N} \setminus A$ jest nieskończony;*

(2) *dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych nie należących do A.*

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2 Podzbiory zbioru liczb całkowitych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2.1. *Jeśli A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{Z}$ takim, że:*

(1) $1 \in A$,

(2) $a \in A \Rightarrow a+1,\ a-1 \in A$,

to $A = \mathbb{Z}$.

3.2.2. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}_0$ będzie takim podzbiorem, że*

$$a, b \in A \Longrightarrow a + b \in A.$$

Jeśli wszystkie liczby zbioru A nie mają wspólnego dzielnika większego od 1, to zbiór A zawiera wszystkie liczby naturalne począwszy od pewnej. ([Mat] 3/1977 185).

3.2.3. *Niech A będzie podzbiorem zbioru liczb całkowitych. Załóżmy, że:*

(a) *istnieją dwie takie liczby $a, b \in A$, że* $\mathrm{nwd}(a,b) = \mathrm{nwd}(a-2, b-2) = 1$;

(b) *jeśli $x, y \in A$, to $x^2 - y \in A$.*

Wykazać, że $A = \mathbb{Z}$. ([OM] USA 2001).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3 Rodziny podzbiorów skończonych zbiorów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3.1. *Zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ posiada dokładnie $n!$ łańcuchów długości n.* ([Kw] 5/2003, 7-10).

D. Z każdą permutacją $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ stowarzyszony jest w jednoznaczny sposób łańcuch $\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \cdots \subset \{a_1, \ldots, a_n\}$. ⊠

3.3.2. *Rodzina wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest antyłańcuchem.* ([Kw] 5/2003, 7-10).

3.3.3 (Schperner 1928). *Maksymalny antyłańcuch utworzony z podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ ma moc równą $\binom{n}{[n/2]}$.* ([Kw] 5/2003, 7-10).

3.3.4. *Przecinająca się rodzina podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ może mieć co najwyżej 2^{n-1} elementów. Istnieje taka rodzina, która ma dokładnie 2^{n-1} elementów. Rodziną taką tworzą na przykład wszystkie podzbiory zawierające jeden ustalony element.* ([Kw] 5/2003, 7-10).

D. Wszystkich podzbiorów zbioru $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ jest 2^n. Jeśli zbiór A należy do przecinającej się rodziny $\mathcal{F}$, to zbiór $X \smallsetminus A$ nie może należeć. Z każdym więc podzbiorem należącym do $\mathcal{F}$ stowarzyszony jest jeden podzbiór, który do $\mathcal{F}$ nie należy. W rodzinie $\mathcal{F}$ może więc być jedynie połowa liczby wszystkich podzbiorów zbioru X, czyli $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. ⊠

3.3.5 (Erdös, Rado). *Jeśli $\mathcal{F}$ jest przecinającą się rodziną podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ składającą się z podzbiorów ustalonej mocy k, to rodzina ta może mieć co najwyżej $\binom{n-1}{k-1}$ elementów.* ([Kw] 5/2003, 7-10).

U. Istnieje rodzina spełniająca powyższe założenia posiadająca dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ elementów. Taką rodzinę tworzą wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ zawierające 1.

Nie musi być tak, że wszystkie podzbiory takiej rodziny mają punkt wspólny. Przykład: $n=4$, $k=2$,

$$\mathcal{F}=\Big\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\Big\}.$$

Jeśli $n>2k$, to można udowodnić, że wszystkie podzbiory takiej rodziny mają punkt wspólny. ⊠

3.3.6. *Niech $f(n)$ oznacza liczbę wszystkich takich par (A,B), że A i B są niepustymi i rozłącznymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Jeśli $n\geqslant 2$, to*

$$f(n)=3^n-2^{n+1}+1.$$ ([Uiuc] 2007).

3.3.7. *Niech $g(n)$ oznacza liczbę wszystkich takich par (A,B), że A i B są rozłącznymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ (nie zakładamy, że zbiory A i B są niepuste). Jeśli $n\geqslant 2$, to $g(n)=3^n$.* ([Uiuc] 2007).

★ J. Bronstein, *Dowody z Księgi* (po rosyjsku), [Kw] 5(2003) 7-10.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.4 Rozbicie zbioru na podzbiory

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W 1916 roku I. Schur udowodnił następujące twierdzenie.

3.4.1 (Schur 1916). *Jeśli zbiór liczb naturalnych rozbijemy na skończoną liczbę podzbiorów, to co najmniej jeden z tych podzbiorów zawiera pewne dwie różne liczby oraz ich sumę.* ([Mat] 5/1956, [S59] 425-427).

Twierdzenie to często wysławia się za pomocą kolorowania.

Załóżmy, że mamy skończoną liczbę kolorów i każda liczba naturalna jest pomalowana jednym z tych kolorów. Istnieją wtedy trzy takie różne liczby naturalne, które są tego samego koloru i jedna z nich jest sumą dwóch pozostałych.

Przy danym kolorowaniu liczb naturalnych o liczbach tego samego koloru mówi się, że są to liczby *monochromatyczne* Z powyższego twierdzenia Schura wynika więc, że *w dowolnym skończonym kolorowaniu liczb naturalnych istnieje monochromatyczne rozwiązanie równania $x+y=z$.*

Można udowodnić:

3.4.2 (Schur 1916). *Niech n,k będą liczbami naturalnymi i niech $A_1,\ldots,A_k$ będą parami rozłącznymi zbiorami takimi, że*

$$\{1,2,\ldots.n\}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k.$$

Jeśli $n\geqslant 2^{[ek]!}$, to co najmniej jeden ze zbiorów $A_1,\ldots,A_k$ zawiera dwie różne liczby oraz ich sumę. ([S59] 427, [S88] 442).

3.4.3. *Jeśli wszystkie liczby naturalne od* 1 *do* $3^{(k+1)!}$ *rozbijemy na* k *klas, to co najmniej jedna z tych klas zawiera pewne dwie różne liczby oraz ich sumę.* ([Mat] 5/1956 1).

Niech $S(k)$ oznacza najmniejszą liczbę naturalną n taką, że w każdym rozkładzie zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na k parami rozłącznych podzbiorów istnieje podzbiór zawierający dwie różne liczby oraz ich sumę. Jest jasne, że $S(1) = 3$. Z powyższego twierdzenia wynika, że

$$S(k) \leqslant 3^{(k+1)!}.$$

Łatwo się dowodzi, że $S(2) = 9$. Nierówność $S(2) \geqslant 9$, wynika z rozkładu

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 4, 8\} \cup \{3, 5, 6, 7\}.$$

Dowód nierówności $S(2) \leqslant 9$ znajdziemy na przykład w [S59], [S88].

3.4.4. *Jeśli liczby* $1, 2, \ldots, 9$ *podzielimy na dwie grupy, to co najmniej jedna z tych grup zawiera pewne dwie różne liczby oraz ich sumę.* ([S59] 427, [S88]).

3.4.5 (A. Mąkowski). *Dla każdej liczby naturalnej* k *zachodzi nierówność*

$$S(k+1) \geqslant 2S(k) + \frac{1}{2}n(n+1) + 1. \quad \text{([Mat] 4/1959 145).}$$

3.4.6. *Niech* A, B *będą takimi rozłącznymi podzbiorami zbioru* $\mathbb{N}$, *że* $A \cup B = \mathbb{N}$. *Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej* n *istnieją liczby naturalne* u, v *większe od* n *takie, że zbiór* $\{u, v, u+v\}$ *jest zawarty albo w zbiorze* A *albo w zbiorze* B. ([Bryn] 7.17).

3.4.7. *Zbiór* $\{1, 2, \ldots, 49\}$ *podzielono na trzy podzbiory. Dowieść, że co najmniej jeden z tych podzbiorów zawiera trzy takie liczby* a, b, c (*niekoniecznie różne*), *że* $a + b = c$.
([IMO] Longlist 1984).

3.4.8. *Zbiór* $\{1, 2, \ldots, 65\}$ *podzielono na* 4 *parami rozłączne podzbiory. Wykazać, że istnieją takie liczby* a, b, c (*niekoniecznie różne*) *należące do jednego z tych zbiorów, że* $a + b = c$.
([Zw] 1999).

3.4.9. *Liczby* $1, 2, \ldots, 3n$ *rozbito na trzy* n*-elementowe grupy. Wykazać, że istnieją trzy takie liczby* a, b, c *należące do różnych grup, że* $a + b = c$. ([OM] ZSRR 1986, [Kw] 8/1987 28).

3.4.10. *Zbiór liczb naturalnych podzielono na dwie nieskończone części. Wykazać, że w każdej części można znaleźć po* 100 *liczb z równymi sumami.* ([Kw] 4/1999 M1667).

3.4.11. *Zbiór liczb naturalnych podzielono na dwa nieskończone podzbiory w ten sposób, że suma dowolnych trzech liczb jednego podzbioru jest w tym podzbiorze. Wykazać, że jeden podzbiór to zbiór wszystkich liczb parzystych, a drugi to zbiór wszystkich liczb nieparzystych.*
([Kw] 2000/6 M1729 s.22).

3.4.12. *Zbiór* $\{1,2,\ldots,n\}$ *można przedstawić jako sumę mnogościową dwóch niepustych rozłącznych podzbiorów tak by sumy wszystkich liczb każdego z tych podzbiorów były równe wtedy i tylko wtedy, gdy* $n = 4k$ *lub* $n = 4k+3$. ([OM] Anglia 1999).

3.4.13. *Zbiór* $\{1,2,\ldots,n\}$ *można rozbić na trzy parami rozłączne podzbiory o jednakowych sumach liczb wtedy i tylko wtedy, gdy* $n > 4$ *i jedna z liczb* n *lub* $n-1$ *jest podzielna przez* 3. ([Kw] 8/1971 42).

D. Jest oczywiste, że jeśli rozważane rozbicie istnieje, to liczba n musi być większa od 4 oraz jedna z liczb n, $n-1$ musi być podzielna przez 3 (ponieważ $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$). Istnieją takie rozbicia dla $n = 5, 6, 8, 9$:

$$\begin{array}{rcccl} 1+4 & = & 2+3 & = & 5 \\ 2+5 & = & 3+4 & = & 1+6 \\ 4+8 & = & 5+7 & = & 1+2+3+6 \\ 6+9 & = & 7+8 & = & 1+2+3+4+5. \end{array}$$

Rozbicia dla liczb n większych od 9 otrzymujemy dodając do odpowiednich wcześniejszych rozbić równości postaci $(a+1)+(a+6) = (a+2)+(a+5) = (a+3)+(a+4)$. ⊠

3.4.14. *Czy można zbiór* $\{1,2,\ldots,100\}$ *podzielić na trzy parami rozłączne podzbiory tak, by suma liczb pierwszego podzbioru była podzielna przez* 102*, drugiego przez* 203 *i trzeciego przez* 304*?* ([OM] Leningrad 1991).

D. Nie można. Przypuśćmy bowiem, że to jest możliwe. Wtedy istnieją takie liczby naturalne x, y, z, że

$$102x + 203y + 304z = 1+2+\cdots+100 = 5050$$

i wtedy $101(x+2y+3z) + x+y+z = 50\cdot 101$, stąd $101 \mid x+y+z$. Mamy sprzeczność:

$$5050 \geqslant 101(x+2y+3z) \geqslant 101(x+y+z) \geqslant 101^2 = 10201. \quad ⊠$$

3.4.15. *Jeśli liczby* $1, 2, \ldots, 9$ *podzielimy na trzy grupy, to iloczyn liczb pewnej grupy jest większy od* 71. ([G-if] 45).

3.4.16. *Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne* n*, że zbiór*

$$\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$$

można rozbić na dwa podzbiory o równych iloczynach. ([IMO] 1970).

U. ([Djmp] s.372). Takie n nie istnieje. Erdös udowodnił , że zbioru postaci $\{n, n+1, \ldots, n+m\}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, nie można rozbić na dwa podzbiory o równych iloczynach. ⊠

3.4.17. *Niech* $n > 10$. *Zbiór* $\{1,2,\ldots,n\}$ *można rozbić na dwa takie rozłączne podzbiory* A *i* B*, że iloczyn liczb podzbioru* A *jest sumą liczb podzbioru* B*. Na przykład, dla* $n = 11$ *mamy:* $A = \{1,5,10\}$ *i* $B = \{1,2,\ldots,11\} \smallsetminus A$*, a dla* $n = 12$ *mamy:* $A = \{2,4,8\}$ *i* $B = \{1,\ldots,12\} \smallsetminus A$. ([Kw] 3/2003 s.28).

3.4.18. *Zbioru* $\mathbb{N}$ *nie można rozbić na trzy parami rozłączne podzbiory tak, że dla dowolnych liczb* x *i* y *należących do różnych podzbiorów liczba* $x^2 - xy + y^2$ *należy do trzeciego podzbioru.* ([IMO] Shortlist 1999).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5 Różne fakty i zadania o zbiorach

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5.1. *Niech* $A_1, A_2, \dots$ *będzie nieskończonym ciągiem zbiorów czteroelementowych, z których każde dwa mają element wspólny. Wykazać, że można znaleźć takie trzy elementy* a, b, c *aby każdy ze zbiorów* A_i *zawierał co najmniej jeden z tych trzech elementów.* ([Dlt] 6/2004 z.476).

3.5.2. *Czy nieskończony zbiór przeliczalny może mieć nieprzeliczalną rodzinę podzbiorów taką, że przekrój dowolnych dwóch różnych podzbiorów jest zbiorem skończonym?* ([Putn] 1989).

D. ([K-pv] s.111). Odpowiedź jest pozytywna. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{Q}$, liczb wymiernych. Jest to nieskończony zbiór przeliczalny. Wiadomo, że każda liczba rzeczywista α jest granicą rosnącego ciągu (a_n) liczb wymiernych. Niech $A_\alpha = \{a_1, a_2, \cdots\}$. Rodzina $\{A_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ spełnia żądane warunki. ⊠

3.5.3. *Czy nieskończony zbiór przeliczalny może mieć nieprzeliczalną rodzinę podzbiorów taką, że przekrój dowolnych dwóch różnych podzbiorów jest zbiorem co najwyżej* 1989 *elementowym?* Odp. *Nie.* ([Halm], [K-pv] s.111).

---

4 Zasada szufladkowa Dirichleta

Niech n, m, k będą liczbami naturalnymi. Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach i n jest większe od mk, to w którejś szufladce znajduje się co najmniej $m+1$ przedmiotów. Fakt ten zwany jest *zasadą szufladkową Dirichleta*. Bardziej matematyczne sformułowanie tej zasady jest następujące.

Niech $n, m, k \in \mathbb{N}$. Niech X będzie skończonym n-elementowym zbiorem i niech $A_1, \dots, A_k$ będą takimi podzbiorami zbioru X, że

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k.$$

Jeśli $n > mk$, to któryś ze zbiorów $A_1, \dots, A_k$ ma co najmniej $m+1$ elementów.

W szczególności, jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach i n jest większe od k, to w którejś szufladce znajdują się co najmniej dwa przedmioty. Angielska nazwa zasady szufladkowej Dirichleta: "the pigeonhole principle" lub "the pigeon-hole principle". *If we put $n+1$ pigeons in n pigeon-holes, then some pigeon-hole contains at least two pigeons.*

Z zasady szufladkowej Dirichleta korzystaliśmy już wielokrotnie w dowodach różnych faktów przedstawionych w książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb". W tym rozdziale przedstawiamy inne zebrane zadania i fakty, w których tę zasadę można wykorzystać.

4.1 Początkowe zadania

4.1.1. *Niech X i Y będą skończonymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Jeśli*

$$|X| > |Y|,$$

to funkcja f nie jest różnowarościowa.

D. Przypomnijmy, że przez $|W|$ oznaczmy liczbę elementów skończonego zbioru W. Załóżmy, że $|X| = n$, $|Y| = k$ i niech $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Niech

$$A_i = \Big\{x \in X;\ f(x) = y_i\Big\},$$

dla $i = 1, 2, \dots, k$. Mamy wtedy $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$. Ponieważ $n > k$, więc - na mocy zasady szufladkowej Dirichleta - krórys ze zbiorów $A_1, \dots, A_k$ ma co najmniej dwa elementy. Załóżmy, że tym podzbiorem jest A_{i_0}. Istnieją więc dwa różne elementy $a, b \in X$, należące do tego samego zbioru A_{i_0}. Wtedy

$$f(a) = f(b) = y_{i_0}$$

oraz $a \neq b$. Funkcja f nie jest więc różnowartościowa. ⊠

4.1.2. *W klasie jest* 37 *osób. Wykazać, że istnieją co najmniej cztery osoby w tej klasie, które urodziły się w tym samym miesiącu.*

D. Niech X będzie zbiorem wszystkich osób w rozważanej klasie. Wiemy, że $|X| = 37$. Rozważmy podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ zbioru X, zdefiniowane następująco. Do zbioru A_1 należą wszystkie te osoby z klasy, które urodziły się w styczniu. Do zbioru A_2 należą wszystkie te osoby z klasy, które urodziły się w lutym, itd., do zbioru A_{12} należą wszystkie te osoby z klasy, które urodziły się w grudniu. Oczywiście

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{12}.$$

Ponieważ $37 > 3 \cdot 12$ więc, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, do któregoś ze zbiorów $A_1, \dots, A_{12}$ należą co najmniej 4 osoby. ⊠

4.1.3. 15 *chłopców zebrało* 100 *orzechów. Wykazać, że co najmniej dwóch chłopców zebrało tę samą liczbę orzechów.* ([Kw] 7/1971 21, [G-if] 45).

4.1.4. 11 *chłopców ma razem* 110 *książek przy czym nie ma dwóch chłopców posiadających tę samą liczbę książek. Wykazać, że można znaleźć* 5 *chłopców posiadających razem co najmniej* 65 *książek.* ([Andz] 55).

4.1.5. *Niech* $\{a_1, \dots, a_{10}\} = \{1, 2, \dots, 10\}$. *Wykazać, że w ciągu*

$$a_1 + 1, \;\; a_2 + 2, \;\; \dots, \;\; a_{10} + 10$$

istnieją dwie takie liczby, których ostatnie cyfry są jednakowe. ([Trad] 13).

4.1.6. *Danych jest* 12 *parami różnych liczb dwucyfrowych. Wykazać, że wśród nich istnieją dwie takie liczby* a *i* b, *że* $|a-b|$ *jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.* ([Kw] 2/1977 20).

4.1.7. *Istnieje potęga liczby* 29 *kończąca się cyframi* 00 001. ([Kw] 7/1971 21).

D. Sposób I. Niech $w = 10\,000$, i niech

$$X = \Big\{29^1, 29^2, 29^3, \cdots, 29^{w+1}\Big\}.$$

Rozważmy podzbiory $A_0, A_1, \; A_2, \; \dots, A_{w-1}$ zbioru X, zdefiniowane następująco. Do zbioru A_r, gdzie $r = 0, 1, \dots, w-1$, należą te wszystkie liczby ze zbioru X, których reszta z dzielenia przez w jest równa r. Oczywiście

$$X = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{w-1}.$$

Ponieważ liczba tych podzbiorów jest ostro mniejsza od liczby elementów zbioru X więc, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, w którymś z podbiorów $A_0, A_1, \dots, A_{w-1}$ są co najmniej dwie różne liczby. Załóżmy, że tym podzbiorem jest A_{r_0}. Istnieją więc dwie takie liczby naturalne $s > t$, że reszty z dzielenia liczb 29^s i 29^t przez w są jednakowe (i równe r_0). Wtedy różnica $29^s - 29^t$ jest podzielna przez w. Mamy więc:

$$w \mid 29^s - 29^t = 29^t\left(29^{s-t} - 1\right).$$

Ponieważ $\mathrm{nwd}\,(29^t, w) = 1$, więc stąd wynika, że $w \mid 29^m - 1$, gdzie $m = s - t \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że $w = 10\,000$. Istnieje więc liczba naturalna m taka, że liczba $29^m - 1$ kończy się pięcioma zerami. Liczba 29^m kończy się więc cyframi 00 001.

Sposób II. Wynika to z twierdzenia Eulera (patrz na przykład [N-4]). Ponieważ liczby 29 i 10 000 są względnie pierwsze, więc

$$10\,000 \mid 29^{\varphi(10\,000)} - 1.$$

Liczba 29^m, gdzie $m = \varphi(10\,000) = 4\,000$, kończy się więc cyframi 00 001. ⊠

4.1.8. *W każdej* 16*-cyfrowej liczbie naturalnej istnieje jedna lub kilka kolejnych cyfr, których iloczyn jest liczbą kwadratową.* ([OM] Japonia 1991, [ME] 1/1995).

4.1.9. *Wśród jedenastu liczb rzeczywistych dodatnich istnieją dwie takie, że ich* (*nieskończone*) *rozwinięcia dziesiętne mają jednakowe k-te cyfry dla nieskończenie wielu k.* ([Mat] 1/1993 42).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.2 Zadania o znajomych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

We wszystkich poniższych zadaniach o znajomych zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to B zna osobę A.

4.2.1. *W sali znajduje się n osób* ($n \geqslant 2$). *Wykazać, że co najmniej dwie z tych osób mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych.* ([Kw] 7/1971 19, [Mako]).

D. Niech X będzie zbiorem wszystkich osób w omawianej sali. Wiemy, że $|X| = n \geqslant 2$. Rozważmy podzbiory $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ zbioru X, zdefiniowane następująco. Do zbioru A_r, gdzie $r = 0, 1, \dots, n-1$, należą te osoby ze zbioru X, które wśród obecnych mają dokładnie r znajomych. Oczywiście

$$X = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}.$$

Zauważmy, że co najmniej jeden ze zbiorów A_0 i A_{n-1} jest pusty. Jeśli bowiem jest osoba, która nie ma wśród obecnych żadnych znajomych, to nie ma takiej osoby, która zna wszystkich i odwrotnie. Ponieważ liczba osób jest większa od liczby niepustych podzbiorów więc, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, istnieje taki podzbiór do którego należą co najmniej dwie osoby. ⊠

4.2.2. *Jest n drużyn piłkarskich. Każde dwie mają rozegrać jeden mecz. Wykazać, że w dowolnym momencie rozgrywek istnieją co najmniej dwie drużyny, które rozegrały już tę samą liczbę meczy.* ([Kw] 7/1971 19).

D. To zadanie wynika z poprzedniego zadania 4.2.1. Zamieńmy osoby na drużyny i zdefiniujmy "znajomość" w następujący sposób. Drużyna A zna drużynę B, jeśli drużyna A rozegrała już mecz z drużyną B. (Wtedy oczywiście również drużyna B zna drużynę A). ⊠

4.2.3. *W sali znajduje się* 225 *osób. Wykazać, że w tej sali istnieje osoba, która zna parzystą liczbę osób będących w tej sali.*

4.2.4. *W klasie liczącej* 50 *uczniów znajdziemy zawsze takich dwóch uczniów, którzy wśród obecnych mają parzystą liczbę wspólnych znajomych.* ([OMm] 1996).

4.2.5. *W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnić, że wszystkich uczestników można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.* ([OM] Polska 1993/1994).

4.2.6. *W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych osób. Wykazać, że można w tej grupie wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.* ([OM] Polska 1995/1996).

★ R. Walker, *The pigenhole principle*, [MG] 61(415)(1977) 25-31.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3 Zadania o liczbach z sumami, różnicami i iloczynami

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3.1. *Danych jest* 8 *różnych liczb naturalnych mniejszych od* 16. *Rozpatrzmy wszystkie dodatnie różnice pomiędzy tymi liczbami. Wykazać, że co najmniej trzy różnice są jednakowe.* ([G-if] 41).

D. Niech X będzie zbiorem wszystkich par (utworzonych z danych liczb) o dodatniej różnicy. Takich par istnieje dokładnie 28. Różnych różnic może być 14, od 1 do 14. Niech A_i, dla $i = 1, \dots, 14$, będzie zbiorem tych wszystkich par ze zbioru X, dla których różnica jest równa i. Mamy wtedy

$$X = A_1 \cup \cdots \cup A_{14} \quad \text{oraz} \quad |X| = 28.$$

Różnica 14 może pojawić się co najwyżej jeden raz. Przypuśćmy, że różnica 14 występuje. Zostaje wtedy 27 par o różnicach od 1 do 13. Ponieważ $27 > 2 \cdot 13$ więc, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, któryś ze zbiorów $A_1, \dots, A_{13}$ posiada co najmniej trzy elementy i to oznacza, że co najmniej trzy różnice są jednakowe. Jeśli różnica 14 się nie pojawia, to zbiór A_{14} jest pusty i teza wynika z nierówności $28 > 2 \cdot 13$. ⊠

4.3.2. *Danych jest* 6 *różnych liczb naturalnych mniejszych od* 10. *Rozpatrzmy wszystkie dodatnie różnice pomiędzy tymi liczbami. Wykazać, że co najmniej trzy różnice są jednakowe.*

D. W tym dowodzie nie skorzystamy z zasady szufladkowej Dirichleta. Załóżmy, że

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

są danymi liczbami naturalnymi i przypuśćmy, że nie ma trzech jednakowych różnic. Rozpatrzmy 5 różnic $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \dots, a_6 - a_5$. Mamy wtedy

$$a_6 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_6 - a_5) \geqslant 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9,$$

wbrew temu, że $a_6 - a_1 \leqslant 8$. ⊠

W ten sam sposób dowodzimy następujące uogólnienie powyższego zadania.

4.3.3. *Danych jest* $2n$ *różnych liczb naturalnych mniejszych od* $n^2 + 1$. *Rozpatrzmy wszystkie dodatnie różnice pomiędzy tymi liczbami. Wykazać, że co najmniej trzy różnice są jednakowe.* ([OM] USA, [AndG] 199).

4.3.4. *Danych jest* 12 *parami różnych liczb dwucyfrowych. Wykazać, że można spośród nich wybrać dwie, których różnica jest liczbą zbudowaną z jednakowych cyfr.* ([StaZ] 14).

4.3.5. *Spośród n dowolnych liczb całkowitych można zawsze wybrać dwie, których różnica jest podzielna przez $n - 1$.*

4.3.6. *Spośród* 100 *liczb całkowitych można wybrać* 15 *takich, że różnica każdych dwóch z wybranych liczb jest podzielna przez* 7. ([WaG] 15).

4.3.7. *Z dziewięciu liczb całkowitych można wybrać zawsze cztery takie liczby a, b, c, d, że liczba*

$$(a+b)-(c+d)$$

jest podzielna przez 20. (Liczba 8 już tej własności nie posiada). ([OM] Indie 2001).

4.3.8. *Dany jest zbiór dziesięciu dwucyfrowych liczb naturalnych. Dowieść, że w tym zbiorze istnieją dwa rozłączne podzbiory takie, że sumy liczb obu podzbiorów są równe.*

D. Niepustych podzbiorów danego zbioru jest $2^{10}-1 = 1023$. Suma elementów każdego podzbioru jest liczbą mniejszą od $10 \cdot 99 = 990$. Istnieją więc dwa różne podzbiory X, Y z tą samą sumą elementów. Jeśli one nie są rozłączne, to tezę spełniają zbiory $X \setminus Y$ i $Y \setminus X$. ⊠

4.3.9. *Dany jest zbiór złożony z 16 trzycyfrowych liczb naturalnych. Dowieść, że w tym zbiorze istnieje pięć parami różnych takich podzbiorów, że suma liczb każdego z tych podzbiorów jest jednakowa.*

4.3.10. *Danych jest $n+1$ liczb naturalnych mniejszych od $2n$. Wykazać, że wśród tych liczb istnieją trzy takie liczby, że jedna z nich jest sumą dwóch pozostałych.*

4.3.11. *Jeśli $n > 3$ jest liczbą naturalną, to spośród n parami różnych liczb dodatnich można wybrać takie dwie, których ani suma, ani różnica nie jest równa żadnej z pozostałych liczb.* ([Br80] s.99).

4.3.12. *Spośród $2m+1$ liczb całkowitych o bezwzględnej wartości nie większej od $2m-1$ można wybrać trzy liczby, których suma jest równa 0.* ([Kw] 4/1975 30, [WaJ] 367(83)).

4.3.13. *Suma 100 naturalnych liczb mniejszych od 101 jst równa 200. Wykazać, że wśród tych liczb istnieją takie, których suma jest równa 100.* ([GaT] 19/74).

4.3.14. *Zbiór A jest 20 elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 4, 7, \dots, 100\}$. Wykazać, że w zbiorze A są dwie różne liczby, których suma jest równa 104.* ([Putn] 1978).

4.3.15. *Niech A będzie podzbiorem zbioru $\{-m, -m+1, \dots, 0, 1, \dots, m\}$ mocy $m+2$. Wykazać, że istnieją trzy różne takie liczby $a, b, c \in A$, że $a+b=c$.* ([OM] Indie 1998).

4.3.16. *Wśród 9 parami różnych liczb naturalnych, których wszystkie dzielniki pierwsze należą do zbioru $\{3, 7, 11\}$, istnieją dwie takie liczby, których iloczyn jest liczbą kwadratową.* ([San4j]).

D. Jeśli liczba naturalna jest kwadratowa, to w jej rozkładzie kanonicznym na iloczyn liczb pierwszych wszystkie wykładniki są liczbami parzystymi. Każda z rozpatrywanych 9 liczb ma rozkład kanoniczny postaci $3^a 7^b 11^c$, gdzie a, b, c są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Każda taka trójka (a, b, c) należy do jednej z następujących 8 klas:

$$(p,p,p),\ (p,p,n),\ (p,n,p),\ (p,n,n),\ (n,p,p),\ (n,p,n),\ (n,n,p),\ (n,n,n),$$

gdzie p oznacza liczbę parzystą oraz n liczbę nieparzystą. Jest 8 klas i 9 trójek. Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją co najmniej dwie trójki należące do tej samej klasy. Iloczyn dwóch liczb stowarzyszonych odpowiednio z tymi trójkami jest oczywiście liczbą kwadratową. ⊠

4.3.17. *Danych jest* 20 *dzielników naturalnych liczby* 70!. *Wykazać, że wśród tych dzielników istnieją takie, których iloczyn jest liczbą kwadratową.* ([Kw] 3/2010 s. 29, M 2157).

D. ([Kw]). Jeśli wśród danych dzielników są dwa identyczne, to ich iloczyn jest liczbą kwadratową. Możemy więc dalej założyć, że dane dzielniki są parami różne. Istnieje dokładnie 19 liczb pierwszych mniejszych od 70. Są to:

$$p_1 = 2, \; p_2 = 3, \; \ldots, \; p_{18} = 61, \; p_{19} = 67.$$

Każdy dzielnik naturalny liczby 70! jest więc postaci

$$p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_{19}^{i_{19}},$$

gdzie $i_1, i_2, \ldots, i_{19}$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Niech X będzie zbiorem wszystkich niepustych podzbiorów zbioru składającego się z 20 danych dzielników i niech Y będzie zbiorem wszystkich ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_{19})$ o wyrazach równych 0 lub 1. Załóżmy, że A jest zbiorem należącym do X. Iloczyn wszystkich elementów zbioru A jest liczbą naturalną postaci

$$p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_{19}^{i_{19}},$$

gdzie $i_1, i_2, \ldots, i_{19}$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Niech $a_1, \ldots, a_{19}$ będą resztami z dzielenia przez 2 odpowiednio liczb $i_1, \ldots, i_{19}$. W ten sposób otrzymujemy ciąg $(a_1, \ldots, a_{19})$ będący elementem zbioru Y. Ciąg ten jest jednoznacznie wyznaczony przez ciąg A. Nazwijmy go indeksem zbioru A.

Zbiór X ma $2^{20} - 1$ elementów. Natomiast zbiór Y ma 2^{19} elementów. Elementów zbioru X jest więc więcej niż elementów zbioru Y. Istnieją zatem (na mocy zasady szufladkowej Dirichleta) dwa różne zbiory A, B, należące do zbioru X i posiadające ten sam indeks. Niech

$$C = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B).$$

Jest jasne, że C jest niepustym zbiorem należącym do X i jego indeksem jest ciąg składający się z samych zer. Iloczyn wszystkich elementów zbioru C jest więc liczbą kwadratową. ⊠

W podobny sposób wykazujemy następne zadania.

4.3.18. *Dane są* 3 *dzielniki naturalne liczby* 72. *Wykazać, że wśród tych dzielników istnieją takie, których iloczyn jest liczbą kwadratową.*

4.3.19. *Dane są* 4 *dzielniki naturalne liczby* 72000. *Wykazać, że wśród tych dzielników istnieją takie, których iloczyn jest liczbą kwadratową.*

★ K. Dorobisz, *O zbiorach liczb naturalnych, których podzbiory mają parami różne sumy elementów*, [Wmm] 57-61.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4 Zadania o liczbach i podzielności

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4.1. *Z ciągu* $1, 2, \ldots, 200$ *wybrano* 101 *liczb. Wykazać, że wśród wybranych liczb są takie dwie, że jedna dzieli drugą.* ([Mat] 3/1949 54, [GaT] 16/47).

D. Oznaczmy wybrane liczby przez $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ i każdą z liczb a_i przedstawmy w postaci $a_i = 2^{t_i} b_i$, gdzie $t_i \in \mathbb{N}_0$ oraz b_i jest nieparzystą liczbą naturalną. Wszystkie liczby $b_1, b_2, \ldots, b_{101}$ są oczywiście mniejsze od 200. W przedziale $[1, 200]$ jest dokładnie 100 nieparzystych liczb naturalnych:

$1, 3, 5, \dots, 199$. Istnieją zatem (na mocy zasady szufladkowej Dirichleta) w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, 101\}$ dwie takie różne liczby i, j, że $b_i = b_j$. Wtedy

$$\frac{a_i}{a_j} = 2^{t_i - t_j}, \quad \frac{a_j}{a_i} = 2^{t_j - t_i}.$$

Jedna z liczb $\frac{a_i}{a_j}$ oraz $\frac{a_j}{a_i}$ jest więc liczbą naturalną. ⊠

4.4.2 (P. Erdös)**.** *Z ciągu* $1, 2, \dots, 2n$ *wybrano* $n+1$ *liczb. Wykazać, że wśród wybranych liczb są takie dwie, że jedna dzieli drugą.* ([Mon] 44(2)(1937) 120).

D. Powtarzamy poprzedni dowód. Oznaczmy wybrane liczby przez $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ i każdą z liczb a_i przedstawmy w postaci $a_i = 2^{t_i} b_i$, gdzie $t_i \in \mathbb{N}_0$ oraz b_i jest nieparzystą liczbą naturalną. Wszystkie liczby $b_1, b_2, \dots, b_{101}$ są oczywiście mniejsze od $2n$. W przedziale $[1, 2n]$ jest dokładnie n nieparzystych liczb naturalnych: $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$. Istnieją zatem (na mocy zasady szufladkowej Dirichleta) w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}$ dwie takie różne liczby i, j, że $b_i = b_j$. Wtedy

$$\frac{a_i}{a_j} = 2^{t_i - t_j}, \quad \frac{a_j}{a_i} = 2^{t_j - t_i}.$$

Jedna z liczb $\frac{a_i}{a_j}$ oraz $\frac{a_j}{a_i}$ jest więc liczbą naturalną. ⊠

4.4.3. *Niech* $m, n \in \mathbb{N}$. *Niech* S *będzie* $(2^m - 1)n + 1$ *elementowym podzbiorem zbioru*

$$\Big\{1, 2, 3, \dots, 2^m n\Big\}.$$

Wykazać, że w zbiorze S *istnieją takie parami różne liczby* $a_0, a_1, \dots, a_m$, *że*

$$a_{i-1} \mid a_i$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, m$. ([Mon] 98(4)(1991) 366-367).

4.4.4. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Istnieją trzy takie parami różne liczby naturalne leżące pomiędzy* n^2 *i* $n^2 + n + 3\sqrt{n}$, *że jedna z nich dzieli iloczyn dwóch pozostałych.* ([OM] Węgry-Izrael 2003).

4.4.5. *Z ciągu* $1, 2, \dots, 200$ *wybrano jedną liczbę mniejszą od* 16 *i jeszcze* 99 *liczb. Wykazać, że wśród wybranych liczb są dwie takie, że jedna dzieli drugą.* ([GaT] 20/47).

4.4.6 (St. Straszewicz)**.** *Z ciągu* $1, 2, \dots, kn$, *gdzie* $k > 1$, *usunięto* $n - 1$ *dowolnych liczb. Wykazać, że wśród pozostałych liczb są dwie takie, których iloraz jest potęgą liczby* k.
([Mat] 3/1949 54).

Wśród trzech dowolnych liczb całkowitych są zawsze dwie takie, które są tej samej parzystości. Wśród trzech dowolnych liczb całkowitych istnieją więc zawsze dwie takie liczby, których suma jest podzielna przez 2. Przedstawmy pewne uogólnienia tego oczywistego faktu.

4.4.7. *Spośród siedmiu dowolnych liczb całkowitych zawsze można wybrać cztery takie liczby, których suma jest podzielna przez* 4.

D. Załóżmy, że mamy siedem liczb całkowitych. Wybierzmy z nich trzy liczby (zupełnie dowolne). Spośród tych trzech wybierzmy dwie takie, które są tej samej parzystości i ich sumę oznaczmy przez b_1. Spośród siedmiu danych liczb wybraliśmy w ten sposób dwie liczby. Pozostało 5 liczb. Z tych pozostałych liczb wybierzmy najpierw trzy (dowolne) i spośród nich wybierzmy dwie tej samej parzystości oraz sumę tych dwóch wybranych liczb oznaczmy przez b_2. Spośród siedmiu danych liczb wybraliśmy w ten sposób już 4 liczby. Pozostały 3 liczby. Spośród tych trzech pozostałych liczb wybierzmy dwie tej samej parzystości i i ch sumę oznaczmy przez b_3. Otrzymaliśmy trzy parzyste liczby

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3.$$

Przy dzieleniu liczby parzystej przez 4 możliwe są tylko dwie reszty: 0 lub 2. Wśród liczb $b_1,\ b_2,\ b_3$ są więc dwie takie, których reszty z dzielenia przez 4 są jednakowe. Zmieniając ewentualnie numerację, możemy dla ustalenia uwagi założyć, że są to liczby b_1 i b_2. Suma $b_1 + b_2$ jest wtedy podzielna przez 4. Ale $b_1 + b_2$ jest sumą czterech liczb wybranych spośrod siedmiu danych. Wybraliśmy więc cztery liczby, których suma jest podzielna przez 4. ⊠

4.4.8. *Spośród* 15 *dowolnych liczb całkowitych zawsze można wybrać* 8 *takich liczby, których suma jest podzielna przez* 8.

D. Wykorzystamy zadanie poprzednie. Załóżmy, że mamy 15 liczb całkowitych. Wybierzmy z nich 7 liczb (zupełnie dowolnych). Spośród tych siedmiu wybierzmy cztery, których suma jest podzielna przez 4 i tę sumę przez b_1. Spośród 15 danych liczb wybraliśmy w ten sposób 4 liczby. Pozostało 11 liczb. Z tych pozostałych liczb wybierzmy najpierw siedem (dowolnych) i następnie spośród nich wybierzmy cztery takie, których suma jest podzielna przez 4; dwie tej samej parzystości tę sumę oznaczmy przez b_2. Spośród 15 danych liczb wybraliśmy w ten sposób już 8 liczb. Pozostało 7 liczb. Spośród tych siedmiu pozostałych liczb wybierzmy cztery, których suma jest podzielna przez 4 i ich sumę oznaczmy przez b_3.

Otrzymaliśmy trzy liczby b_1, b_2, b_3 i wszystkie są podzielne przez 4. Liczba podzielna przez 4 ma przy dzieleniu przez 8 resztę równą 0 lub 4. Wśród liczb b_1, b_2, b_3 są więc dwie takie, których reszty z dzielenia przez 8 są jednakowe. Zmieniając ewentualnie numerację, możemy dla ustalenia uwagi założyć, że są to liczby b_1 i b_2. Suma $b_1 + b_2$ jest wtedy podzielna przez 8. Ale $b_1 + b_2$ jest sumą ośmiu liczb wybranych spośród 15 danych. Wybraliśmy więc 8 liczb, których suma jest podzielna przez 8. ⊠

W ten sam sposób można udowodnić:

4.4.9. *Spośród* $2^{n+1} - 1$ *dowolnych liczb całkowitych zawsze można wybrać* 2^n *takich liczb, których suma jest podzielna przez* 2^n.

4.4.10. *W dowolnym n-wyrazowym ciągu liczb całkowitych istnieje pewna liczba wyrazów, których suma jest podzielna przez n.*

D. Niech $(a_1, \dots, a_n)$ będzie danym ciągiem liczb całkowitych. Rozpatrzmy liczby:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots,\ s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Jeśli któraś z tych liczb jest podzielna przez n, to teza jest spełniona. Załóżmy, że żadna z tych nie dzieli się przez n. Istnieją wtedy (na mocy zasady szufladkowej Dirichleta) dwie takie liczby s_i ,s_j (gdzie $i > j$), których reszty z dzielenia przez n, są jednakowe. Wtedy liczba

$$a_{j+1} + a_{j+2} + \dots a_i = s_i - s_j$$

jest podzielna przez n. ⊠

4.4.11. *Z dowolnych* 52 *liczb naturalnych można wybrać dwie liczby, których albo suma, albo różnica jest podzielna przez* 100. ([Kw] 7/1971 19).

4.4.12. *Wykazać, że w* $(n+2)$*-elementowym zbiorze liczb naturalnych istnieją dwie liczby, których albo suma albo różnica jest podzielna przez* $2n$. ([MOc] 2001 z.74).

4.4.13. *Danych jest* 200 *liczb całkowitych. Wykazać, że wśród nich istnieje* 100 *liczb, których suma jest podzielna przez* 100. ([WaJ] 137(70), [Zw] 2004).

4.4.14. *Z pięciu dowolnych liczb całkowitych można wybrać zawsze* 3 *takie liczby, których suma jest podzielna przez* 3. ([OM] Kanada 1970).

D. ([CieS] s.17, 194). Jeśli wśród danych liczb są trzy mające różne reszty z dzielenia przez 3, to te właśnie liczby można wybrać. W przeciwnym wypadku wśród pięciu danych liczb są trzy liczby o równych resztach z dzielenia przez 3 i to te można wybrać. ⊠

4.4.15.

(1) *Z* 41 *dowolnych liczb całkowitych można wybrać zawsze* 21 *takich liczb, których suma jest podzielna przez* 21. ([Kw] 2/2010 45).

(2) *Niech* $n > 1$. *Wykazać, że z dowolnych* $2n-1$ *liczb całkowitych można wybrać* n *takich liczb, których suma jest podzielna przez* n. ([Kw] 7/1971 30, 8/1971 43, 2/2010 45-48).

4.4.16. *Wykazać, że z dowolnych* $4n^2+1$ *liczb całkowitych można wybrać* $2n+1$ *takich liczb, których suma jest podzielna przez* $2n+1$. ([Mat] 5/1992 304).

4.4.17. *Jeśli* a *i* n *są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to istnieją takie liczby całkowite* x, y, *że*

$$|x| \leqslant \sqrt{n}, \quad |y| \leqslant \sqrt{n} \quad \textit{oraz} \quad n \mid ax - y. \qquad \text{([Fom] 18/64).}$$

4.4.18. *Danych jest* 100 *liczb naturalnych mniejszych od* 94. *Wykzać, że wśród tych liczb istnieją takie, których suma ma resztę z dzielenia przez* 101 *równą* 95. ([Kw] 2/2010 45).

Przedstawimy teraz kilka takich zastosowań zasady szufladkowej Dirichleta, którymi zajmowaliśmy się w innych książkach serii "Podróże po Imperium Liczb".

4.4.19. *Dla każdej liczby naturalnej* n, *względnie pierwszej z* 10, *istnieje liczba postaci* $11\dots1$ *podzielna przez* n.

D. ([N-2]). Oznaczmy przez e_m liczbę m-cyfrową $11\dots1$ (zbudowaną z samych jedynek).
Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy liczby

$$e_1, \ e_2, \ \dots, \ e_n, \ e_{n+1}.$$

Wśród tych liczb istnieją co najmniej dwie takie, powiedzmy e_a i e_b, gdzie $a < b$, których reszty z dzielenia przez n są jednakowe (gdyż tych liczb jest więcej niż wszystkich możliwych reszt). Wtedy liczba $e_b - e_a$ jest podzielna przez n. Zauważmy, że $e_b - e_a = e_{b-a}10^a$. Ponieważ $\mathrm{nwd}(n, 10) = 1$, więc liczba e_{b-a} jest podzielna przez n. ⊠

U. W tym dowodzie wykorzystaliśmy zasadę szufladkową Dirichleta. Przy dodatkowym założeniu, że liczba n nie jest podzielna przez 3, można to wykazać przy pomocy twierdzenia Eulera. Mamy bowiem: $n \mid 10^{\varphi(n)} - 1 = 9e_{\varphi(n)}$. ⊠

4.4.20. *Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami całkowitymi i niech u, v, w będą liczbami całkowitymi. Wtedy kongruencja*

$$ux + vy + wz \equiv 0 \pmod{|abc|}$$

posiada niezerowe rozwiązanie (x, y, z) takie, że

$$|x| \leqslant \sqrt{|bc|}, \quad |y| \leqslant \sqrt{|ac|}, \quad |z| \leqslant \sqrt{|ab|}.$$ ([Mol2] 275).

D. ([Mol2] 275, [N-3]). Rozważmy zbiór

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3;\ 0 \leqslant x \leqslant \left[\sqrt{|bc|}\right],\ 0 \leqslant y \leqslant \left[\sqrt{|ac|}\right],\ 0 \leqslant z \leqslant \left[\sqrt{|ab|}\right]\right\}.$$

Jest to skończony zbiór posiadający dokładnie n elementów, gdzie

$$n = \left(1 + \left[\sqrt{|bc|}\right]\right)\left(1 + \left[\sqrt{|ac|}\right]\right)\left(1 + \left[\sqrt{|ab|}\right]\right).$$

Zauważmy, że $n > \sqrt{|bc|} \cdot \sqrt{|ac|} \cdot \sqrt{|ab|} = |abc|$. Zbiór S posiada więc więcej niż $|abc|$ elementów. Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją zatem dwa różne elementy zbioru S, powiedzmy (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) takie, że

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 \equiv ux_2 + vy_2 + wz_2 \pmod{|abc|}.$$

Niech $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ oraz $z = z_1 - z_2$. Wtedy $|x| \leqslant \sqrt{|bc|}$, $|y| \leqslant \sqrt{|ac|}$, $|z| \leqslant \sqrt{|ab|}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ oraz $ux + vy + wz \equiv 0 \pmod{|abc|}$. ⊠

W przypadku, gdy $c = 1$ oraz $a, b \in \mathbb{N}$, powyższe stwierdzenie przyjmuje następującą postać.

4.4.21. *Jeśli a, b są liczbami naturalnymi oraz u, v, w liczbami całkowitymi, to kongruencja*

$$ux + vy + wz \equiv 0 \pmod{ab}$$

posiada niezerowe rozwiązanie (x, y, z) takie, że

$$|x| \leqslant \sqrt{b}, \quad |y| \leqslant \sqrt{a}, \quad |z| \leqslant \sqrt{ab}.$$

Przez (u_n) oznaczamy ciąg liczb Fibonacciego:

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

4.4.22. *Istnieje liczba Fibonacciego, która na końcu ma 100 zer.*

Jest to szczególny przypadek następującego stwierdzenia.

4.4.23. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje taka liczba naturalna n, że $m \mid u_n$.*
([Kw] 7/71 20, [Wor78] 40).

D. ([N-7]). Wykorzystamy zasadę szufladkową Dirichleta. Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n, oznaczmy przez $\overline{u_n}$ resztę z dzielenia liczby Fibonacciego u_n przez m. Niech X będzie zbiorem wszystkich par postaci (u_n, u_{n+1}), gdzie $1 \leqslant n \leqslant m^2+1$. Takich par jest m^2+1, tzn. $|X| = m^2+1$.

Niech I będzie zbiorem wszystkich par (a,b) takich, że $a, b \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Zbiór I ma oczywiście m^2 elementów. Dla każdej pary (a,b), należącej do zbioru I, rozważmy zbiór (szufladkę)

$$A_{(a,b)} = \Big\{(u_n, u_{n+1}) \in X;\ \overline{u_n} = a, \overline{u_{n+1}} = b\Big\}$$

Jest oczywiste, że zbiór X jest sumą mnogościową wszystkich zbiorów postaci $A_{(a,b)}$, gdzie $(a,b) \in I$. Ponieważ $|X| = m^2+1 > m^2 = |I|$ więc, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, istnieje taki zbiór postaci $A_{(a,b)}$, który ma co najmniej dwa różne elementy. Załóżmy, że tym zbiorem jest $A_{(a,b)}$ i niech $(u_s, u_{s+1}) \in A_{(a,b)}$ oraz $(u_t, u_{t+1}) \in A_{(a,b)}$, gdzie $s < t$. Wtedy reszty z dzielenia liczb u_s i u_t przez m są jednakowe i równe a. Reszty z dzielenia liczb u_{s+1} i u_{t+1} są również jednakowe, i są równe b. Mamy więc:

$$u_s \equiv u_t \pmod m, \quad u_{s+1} \equiv u_{t+1} \pmod m.$$

Ponieważ $u_{s-1} = u_{s+1} - u_s$ oraz $u_{t-1} = u_{t+1} - u_t$, więc mamy również kongruencję

$$u_{s-1} \equiv u_{t-1} \pmod m.$$

W ten sam sposób otrzymujemy następne kongruencje: $u_{s-2} \equiv u_{t-2} \pmod m$, $u_{s-3} \equiv u_{t-3} \pmod m$, itd. Dochodzimy w ten sposób do kongruencji

$$u_n \equiv u_0 \pmod m,$$

gdzie $n = t - s$. Ale $u_0 = 0$, więc m dzieli u_n. ⊠

Z tego dowodu wynika:

4.4.24. *Dla każdego n w ciągu $u_1, u_2, \dots, u_{n^2}$ istnieje liczba podzielna przez n.*
([Crux] 1998 s.420).

★ A. Tołpygo, *O jednym zapomnianym zadaniu* (po rosyjsku), [Kw] 2/2010 45-48.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5 Nierówności i zasada szufladkowa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5.1. *Z trzech dodatnich liczb rzeczywistych zawsze można wybrać dwie takie liczby x i y, że*

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1. \quad \text{([Kw] 9/1987 61).}$$

4.5.2. *Z czterech liczb rzeczywistych zawsze można wybrać dwie takie liczby x i y, że*

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1. \quad \text{([Kw] 9/1987 25).}$$

4.5.3. *Spośród 7 różnych liczb rzeczywistych zawsze można wybrać dwie takie liczby x i y, że*

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} < \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{([San2] 17).}$$

D. ([Ko02]) Niech $a_1, \ldots, a_7$ będą danymi liczbami. Isntnieją takie liczby rzeczywiste $\beta_1, \ldots, \beta_7$, że $a_i = \operatorname{tg}\beta_i$, $\beta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $i = 1, \ldots, 7$. Wśród liczb $\beta_1, \ldots, \beta_7$ są oczywiście dwie takie, których różnica jest mniejsza od $\frac{\pi}{6}$. Niech to będą liczby $\alpha > \beta$. Wówczas

$$0 < \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Przyjmujemy: $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$. ⊠

4.5.4. *Spośród* 9 *różnych liczb rzeczywistych zawsze można wybrać dwie takie liczby x i y, że*

$$0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} < \sqrt{2} - 1. \quad \text{([ME] 1/1995).}$$

4.5.5. *Spośród* 11 *różnych liczb rzeczywistych z przedziału* [1, 1000] *zawsze można wybrać dwie takie liczby x i y, że*

$$0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}.$$

Dla 10 *różnych liczb rzeczywistych z przedziału* [1, 1000] *to już może nie zachodzić. To nie zachodzi na przykład dla liczb* $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 10^3$. ([OM] Kanada, [Cmj] 18(2)(1987) 166).

4.5.6. *Z pięciu parami różnych liczb rzeczywistych zawsze można wybrać dwie takie liczby x i y, że* $|xy + 1| > |x - y|$. ([AFe] 27).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6 Zadania różne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6.1. *Dany jest zbiór złożony z* 1995 *różnych liczb naturalnych, przy czym żadna z nich nie dzieli się przez liczbę pierwszą większą od* 23. *Udowodnić, że w tym zbiorze można znaleźć* 4 *liczby, których średnia geometryczna jest liczbą naturalną.* ([Kw] 4/1986 36).

4.6.2. *Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $n \geqslant 3$ taką, że jeżeli $T_1, \ldots, T_n$ są zbiorami trójelementowymi, z których każde dwa mają dokładnie jeden element wspólny, to istnieje wspólny element wszystkich tych zbiorów.* Odp. $n = 8$. ([Dlt] 3/1994).

4.6.3. *Z danego n elementowego zbioru wybrano 2^{n-1} takich podzbiorów, z których każde trzy mają element wspólny. Wykazać, że wszystkie wybrane podzbiory mają co najmniej jeden element wspólny.* ([Kw] 2/1971 30 M25).

★ Z. Bobiński, P. Nodzyński, A. Świątek, *Zasada Szufladkowa Dirichleta*, [Min] 37, 2012.
W. Bołtiański, *Sześć zajęcy i pięć klatek*, [Kw] 2/1977 17-20.
J. Górnicki, *Prosta zasada*, [Mat] 5/1999 268-276.
Kin-Yin Li, *Pigeonhole Principle*, [ME] 1(1995).
A. Mąkowski, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, Biblioteczka Delty 3, 1980.
A. I. Orłow, *Zasada Dirichleta*, [Kw] 7/1971 17-21.
H. Pawłowski, *Zasada Szufladkowa Dirichleta*, [Pa94] 245-260.
M. Rosiak, *Uogólnienia zasady szufladkowej Dirichleta ...*, [Pmgr] 2003.
D. A. Santos, *Pigeonhole principle*, [San2] 16-20.
J. Stojanowski, *Przykłady zastosowań zasady Dirichleta ...*, [Mat] 1/1978 40-42.
A. P. Street, *Pigeonholes and tow-way counting*, [MC], 16(1)(2003) 70-91.
J. Wojciechowski, *Kącik olimpijski* (Zasada szufladkowa Dirichleta), [Dlt] 1/1986 13.
H. Żołądek, *Zasada szufladkowa Dirichleta w mechanice*, [Dlt] 3/1998 4-7.

5 Tablice liczbowe

5.1 Prostokątne tablice z liczbami

5.1.1. *Liczby naturalne* $1, 2, 3, \ldots, 2n$ *wpisano w prostokątną tablicę wymiaru* $2 \times n$ *w ten sposób, że suma wszystkich liczb górnego wiersza jest równa sumie wszystkich liczb dolnego wiersza oraz sumy liczb wszystkich kolumn są jednakowe. Przykłady dla* $n = 4, 6, 8$*:*

8	2	3	5
1	7	6	4

1	11	3	9	8	7
12	2	10	4	5	6

1	15	14	4	5	11	10	8
16	2	3	13	12	6	7	9

Wykazać, że można to zrobić wtedy i tylko wtedy, gdy n *jest liczbą parzystą* $\geqslant 4$.
([Kw] 5/1987 25).

D. Jeśli można to zrobić, to $n(2n+1) = 1 + 2 + \cdots + 2n = 2a$, gdzie $a \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że n musi być liczbą parzystą. Jest oczywiste, że n musi być większe od 2. Niech więc $n = 2k$, gdzie $k \geqslant 2$. Ustawiamy najpierw liczby $1, 2, \ldots, 4k$ następująco:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2k-1 & 2k \\ 4k & 4k-1 & 4k-2 & \ldots & 2k+2 & 2k+1 \end{array}$$

Wówczas wszystkie kolumny mają jednakowe sumy. Suma liczb dolnego wiersza jest równa $(1+2+\cdots+2k)+2k\cdot 2k$, a zatem jest o $4k^2$ większa od sumy liczb górnego wiersza. Przestawiamy liczby występujące w dwóch kolumnach jednakowo odległych odpowiednio od kolumny początkowej i kolumny końcowej. Wówczas suma górnego wiersza wzrośnie o $4k$, a dolnego o $4k$ zmaleje. Powtarzamy to tak długo, aż rozważane sumy będą równe. ⊠

5.1.2. *W kwadratową tablicę* 6×6 *wpisano w dowolny sposób liczby* $1, 2, \ldots, 36$. *Wykazać, że istnieją w tej tablicy dwie takie sąsiednie liczby* a *i* b, *że* $a - b \geqslant 5$. ([Kw] 7/1971 21, 12/1971 24).

U. Sąsiednimi liczbami nazywamy liczby będące w klatkach posiadających wspólną krawędź.

5.1.3. *W kwadratową tablicę* $n \times n$ *wpisano w dowolny sposób liczby* $1, 2, \ldots, n^2$. *Wykazać, że istnieją w tej tablicy dwie sąsiednie liczby* a *i* b *takie, że* $a - b \geqslant n$. ([Kw] 12/1971 24).

5.1.4. *W kwadratową tablicę* 9×9 *wpisano w dowolny sposób parami różne liczby całkowite. Wykazać, że istnieją w tej tablicy dwie sąsiednie liczby* a *i* b *takie, że* $a - b \geqslant 6$.
([Kw] 12/1971 24).

5.1.5. *W pierwszym wierszu tablicy wpisujemy kolejne liczby naturalne, w drugim kolejne wielokrotności dwójki, w trzecim kolejne wielokrotności trójki, itd.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	$\cdots$
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	$\cdots$
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	$\cdots$
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	$\cdots$
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Wykazać, że każda liczba tej tablicy jest 8 *razy mniejsza od sumy wszystkich swoich liczb sąsiednich.* ([Mat] 2/1992 99).

D. Rozpatrzmy liczbę stojąca w a-tym wierszu i b-tej kolumnie. Liczba ta jest równa ab. Nad nią są liczby $(a-1)(b-1)$, $(a-1)b$, $(a-1)(b+1)$, pod nią są liczby $(a+1)(b-1)$, $(a+1)b$, $(a+1)(b+1)$. Z lewej strony strony jest $a(b-1)$, a z prawej $a(b+1)$. Suma wszystkich wypisanych liczb jest równa $8ab$. ⊠

5.1.6. *W tablicy $m \times n$ znajdują się pewne liczby. Zmieniamy wszystkie liczby pewnego wiersza lub pewnej kolumny na przeciwne. Powtarzamy to kilka razy. Wykazać, że w ten sposób można otrzymać tablicę, w której sumy wszystkich liczb każdego wiersza i sumy wszystkich liczb każdej kolumny są nieujemne.* ([Kw] 1/1972 41, [Dlt] 7/1996 16).

5.1.7. *Czy można w kratki tablicy* 9×9 *wpisać liczby naturalne od* 1 *do* 81 *tak, aby suma liczb w każdym kwadracie* 3×3 *była jednakowa?* Odp. *Można.* ([MaS] 1/1996).

5.1.8. *Dana jest tablica* 50×50. *W pewnych klatkach są liczby* 1 *i* -1. *Bezwzględna wartość sumy wszystkich liczb jest* $\leqslant 100$. *Wykazać, że w pewnym kwadracie* 25×25, *utworzonym z tej tablicy, bezwzględna wartość sumy wszystkich liczb jest* $\leqslant 25$. ([OM] Leningrad 1990).

5.1.9. *Ile jest* 8×8 *macierzy zero-jedynkowych takich, że w każdej kolumnie jest nieparzysta liczba jedynek?* Odp. 2^{49}. ([Uiuc] 2007).

★ M. L. Gerwer, *Zadania o liczbach w tablicy*, [Kw] 12/1971 24-27.
Ryszard Krajewski (Maurycy), *Niezmienniki pewnych tablic liczbowych*, [Pmgr] 1985.

5.2 Kwadraty magiczne stopnia 3

Kwadratem magicznym stopnia n nazywamy każdą taką kwdratową $n \times n$ macierz liczbową, w której sumy liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie oraz na każdej przekątnej są takie same. Ta stała suma często nazywa się *sumą magiczną*.

Bardzo popularne są kwadraty magiczne, w których występują wszystkie liczby naturalne $1, 2, \ldots, n^2$. Ich stała suma jest równa $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ taki kwadrat magiczny istnieje (przeczytać o tym można w różnych książkach; patrz na przykład: [Pick], [S59] 434).

Istnieje dokładnie 8 takich kwadratów magicznych stopnia 2. Oto one:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

W każdym z tych kwadratów jest w środku liczba 5 i przy wszystkich czterech wierzchołkach są tylko liczby parzyste. Każdy z wypisanych kwadratów powstaje z jednego takiego kwadratu przez obrót lub symetryczne odbicie. Z dokładnością do tych operacji tego rodzaju kwadrat magiczny jest tylko jeden. Spójrzmy na ostatni z powyższych kwadratów:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

5.2.1. ([Mon] 2/1999 152). *Zachodzą następujące równości:*

$$\begin{array}{rcl} 816^2+357^2+492^2 &=& 618^2+753^2+294^2,\\ 834^2+159^2+672^2 &=& 438^2+951^2+276^2,\\ 654^2+132^2+879^2 &=& 456^2+231^2+978^2,\\ 639^2+174^2+852^2 &=& 936^2+471^2+258^2,\\ 654^2+798^2+213^2 &=& 456^2+897^2+312^2,\\ 693^2+714^2+258^2 &=& 396^2+417^2+852^2. \end{array}$$

Wspominaliśmy już o tych równościach w [N-3]. Zachodzą tu również takie równości:

$$\begin{array}{rcl} 8^2+1^2+6^2 &=& 4^2+9^2+2^2,\\ 8^2+3^2+4^2 &=& 6^2+7^2+2^2. \end{array}$$

Okazuje się, że to nie jest przypadek. Taką własność posiada każdy kwadrat magiczny stopnia 3.

5.2.2. *W dowolnym kwadracie magicznym stopnia* 3

a	b	c
d	e	f
g	h	k

zachodzą równości $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = g^2+h^2+k^2,\\ a^2+d^2+g^2 = c^2+f^2+k^2. \end{cases}$ ([B-ns]).

5.2.3. *Kwadraty magiczne stopnia* 3*, których lustrzane odbicia są również kwadratami magicznymi.*

46	91	28
37	55	73
82	19	64

64	19	82
73	55	37
28	91	46

64	47	87
89	66	43
45	85	68

46	74	78
98	66	34
54	58	86

Suma magiczna pierwszej pary jest równa 165*, a drugiej pary* 198. ([Behf]).

5.2.4. *Ciekawą własność posiada kwadrat* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&8&3\\\hline 6&5&4\\\hline 7&2&9\\\hline\end{array}$ *, który nie jest magiczny. Spójrzmy na rysunek:*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \rightarrow & 8 & \longleftarrow & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow & \downarrow\\ 6 & \rightarrow & 5 & \longleftarrow & 4\\ \uparrow & \searrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow\\ 7 & \rightarrow & 2 & \longleftarrow & 9 \end{array}$$

Sumy każdych czterech liczb występujących w narożnikach kwadratów (jest 6 *takich kwadratów) są stałe i wynoszą* 20. ([Kw] 5/1998 51,60).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.3 Kwadraty magiczne stopnia 4

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpatrzmy kwadraty magiczne stopnia 4, zbudowane z liczb $1, 2, \dots, 16$. Suma magiczna takich kwadratów jest równa 34. Dzisiaj nie jest trudno sprawdzić, że istnieje dokładnie 7040 takich kwadratów magicznych (sprawdziliśmy to za pomocą Maple). Z jednego kwadratu, przez obrót lub symetryczne odbicie, otrzymujemy 8 różnych tego rodzaju kwadratów magicznych. Z dokładnością do tych operacji istnieje więc ich dokładnie $880 = 7040 : 8$. Tę liczbę 880 podano już w siedemnastym wieku (patrz [Pick] 4).

5.3.1. *Liczba wszystkich kwadratów magicznych stopnia* 4*, dających się zbudować z liczb* $1, 2, \dots, 16$*, jest podzielna przez* 16. ([Mat] 1-2/1955 73).

5.3.2 (Maple). *Poniższa tablica dotyczy kwadratów magicznych stopnia* 4*, zbudowanych z liczb od* 1 *do* 16*. Podane w niej liczby informują o tym ile jest różnych takich kwadratów, w których pierwszy wiersz rozpoczyna się liczbami a i b.*

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	*razem*
1	–	3	8	24	8	26	31	36	7	32	26	47	31	47	48	42	416
2	3	–	26	8	30	4	36	29	30	7	46	24	36	35	42	44	400
3	8	30	–	3	24	41	8	28	28	36	4	34	44	39	33	44	404
4	32	8	9	–	49	34	32	8	43	34	32	8	39	56	55	37	476
5	8	30	38	38	–	6	4	32	30	47	42	36	8	30	32	51	432
6	34	12	46	28	0	–	38	8	44	30	36	54	32	12	52	30	456
7	37	47	4	36	14	30	–	0	42	39	40	44	26	54	11	36	460
8	47	39	40	4	36	10	0	–	39	46	47	40	47	32	38	11	476
9	11	38	32	47	40	47	46	39	–	0	10	36	4	40	39	47	476
10	36	11	54	26	44	40	39	42	0	–	30	14	36	4	47	37	460
11	30	52	12	32	54	36	30	44	8	38	–	0	28	46	12	34	456
12	51	32	30	8	36	42	47	30	32	4	6	–	38	38	30	8	432
13	37	55	56	39	8	32	34	43	8	32	34	49	–	9	8	32	476
14	44	33	39	44	34	4	36	28	28	8	41	24	3	–	30	8	404
15	44	42	35	36	24	46	7	30	29	36	4	30	8	26	–	3	400
16	42	48	47	31	47	26	32	7	36	31	26	8	24	8	3	–	416

5.3.3. ([Mat] 5/1972 298). *Poniższy kwadrat magiczny stopnia* 4 *(o magicznej sumie $s = 34$)*

1	12	15	6
14	7	4	9
8	13	10	3
11	2	5	16

posiada następujące własności.

(1) *Suma liczb środkowego 2×2 kwadratu jest równa s.*

(2) *Sumy liczb wszystkich narożnych 2×2 kwadratów są równe i wynoszą s.*

(3) *Suma czterech narożnych liczb jest równa s.*

(4) *Zachodzą równości:*

$$\begin{aligned}
1^2+14^2+8^2+11^2 &= 6^2+9^2+3^2+16^2 &&= 382,\\
12^2+7^2+12^2+2^2 &= 15^2+4^2+10^2+3^2 &&= 366,\\
1^2+12^2+15^2+6^2 &= 11^2+2^2+5^2+16^2 &&= 406,\\
14^2+7^2+4^2+9^2 &= 8^2+13^2+10^2+3^2 &&= 342.
\end{aligned}$$

U. W artykule W. A. Gołubiewa [Mat] 5/1972 298-300, podane są jeszcze inne własności rozważanego kwadratu magicznego. ⊠

Udowodnimy, że własności (1) i (3) posiada każdy tego typu kwadrat magiczny.

5.3.4. *W każdym kwadracie magicznym stopnia* 4*, zbudowanym z liczb od* 1 *do* 16*, sumy liczb występujących w zaznaczonych miejscach:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline * & & & * \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline * & & & * \\ \hline\end{array}\,, \quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & * & * & \\ \hline & * & * & \\ \hline & & & \\ \hline\end{array}\,, \quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & * & * & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & * & * & \\ \hline\end{array}\,, \quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline * & & & * \\ \hline * & & & * \\ \hline & & & \\ \hline\end{array}\,,$$

są równe i wynoszą 34*.*

D. Liczby występujące w danym kwadracie magicznym oznaczmy odpowiednio przez $a_1, \ldots, a_{16}$. Mamy więc kwadrat magiczny

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \hline a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \hline\end{array}\,.$$

(a). Udowodnimy, że suma liczb występujących w narożnikach jest równa 34, tzn. wykażemy, że

$$a_1+a_4+a_{13}+a_{16}=34.$$

W tym celu rozpatrzmy sumę liczb pierwszego i czwartego wiersza oraz dwóch przekątnych. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned}
136=4\cdot 34 &= (a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16})\\
&\quad +(a_1+a_6+a_{11}+a_{16})+(a_4+a_7+a_{10}+a_{13})\\
&= 2(a_1+a_4+a_{13}+a_{16})+(a_2+a_6+a_{10}+a_{14})+(a_3+a_7+a_{11}+a_{15})\\
&= 2(a_1+a_4+a_{13}+a_{16})+34+34
\end{aligned}$$

i stąd $a_1+a_4+a_{13}+a_{16}=34$.

(b). Udowodnimy, że suma liczb środkowego 2×2 kwadratu jest równa 34, tzn. wykażemy, że

$$a_6+a_7+a_{10}+a_{11}=34.$$

W tym celu dodajemy do siebie dwie przkątne i wykorzystujemy udowodnioną już własność (a):

$$\begin{aligned}
68 &= (a_1+a_6+a_{11}+a_{16})+(a_4+a_7+a_{10}+a_{13})\\
&= (a_6+a_7+a_{10}+a_{11})+(a_1+a_4+a_{13}+a_{16})\\
&= (a_6+a_7+a_{10}+a_{11})+34
\end{aligned}$$

i stąd $a_6+a_7+a_{10}+a_{11}=34$.

(c). W podobny sposób wykazujemy, że $a_2+a_3+a_{14}+a_{15}=34$ oraz $a_5+a_9+a_8+a_{12}=34$. ⊠

5.3.5. *Kwadrat magiczny*

2	11	16	5
13	8	3	10
7	14	9	4
12	1	6	15

posiada następujące równości.

(1) *Sumy kwadratów odpowiednich wierszy i kolumn są jednakowe:*

$$\begin{aligned} 2^2+11^2+16^2+5^2 &= 12^2+1^2+6^2+15^2 = 406,\\ 13^2+8^2+3^2+10^2 &= 7^2+14^2+9^2+4^2 = 342,\\ 2^2+13^2+7^2+12^2 &= 5^2+10^2+4^2+15^2 = 366,\\ 11^2+8^2+14^2+1^2 &= 16^2+3^2+9^2+6^2 = 382. \end{aligned}$$

(2) *Równości dla przekątnych:*

$$\begin{aligned} 2^1+8^1+9^1+15^1 &= 5^1+3^1+14^1+12^1 = 34,\\ 2^2+8^2+9^2+15^2 &= 5^2+3^2+14^2+12^2 = 374,\\ 2^3+8^3+9^3+15^3 &= 5^3+3^3+14^3+12^3 = 4624. \end{aligned}$$

(3) *Sumy liczb wszystkich narożnych* 2×2 *kwadratów są równe i wynoszą* 34.

(4) *Suma dowolnych dwóch liczb, symetrycznych względem środka, jest równa* 17.

5.3.6. *W kwadracie magicznym*

1	8	14	11
4	15	5	10
13	2	12	7
16	9	3	6

zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} 1^2+8^2+14^2+11^2 &= 16^2+9^2+3^2+6^2,\\ 4^2+15^2+5^2+10^2 &= 13^2+2^2+12^2+7^2,\\ 8^2+15^2+2^2+9^2 &= 14^2+5^2+12^2+3^2,\\ 1^2+15^2+12^2+6^2 &= 11^2+5^2+2^2+16^2,\\ 12^2+7^2+3^2+6^2 &= 8^2+11^2+2^2+7^2,\\ 11^2+10^2+7^2+6^2 &= 1^2+8^2+4^2+15^2,\\ 8^2+10^2+13^2+6^2 &= 14^2+4^2+7^2+9^2,\\ 13^2+2^2+16^2+9^2 &= 1^2+14^2+13^2+2^2,\\ 1^2+4^2+13^2+16^2 = 14^2+11^2 &+ 5^2+10^2 = 15^2+10^2+9^2+6^2,\\ 8^3+15^3+2^3+9^3 &= 14^3+5^3+12^3+3^3,\\ 1^3+15^3+12^3+6^3 &= 15^3+10^3+9^3+6^3,\\ 1^3+14^3+13^3+2^3 &= 14^3+10^3+13^3+9^3,\\ 1^4+15^4+12^4+6^4 &= 8^4+5^4+7^4+16^4. \end{aligned}$$

5.3.7. *W poniższych kwadratach magicznych stopnia* 4 :

7	12	5	10
14	3	16	1
11	6	9	8
2	13	4	15

13	10	3	8
12	1	6	15
5	16	11	2
4	7	14	9

7	16	9	2
10	3	6	15
5	14	11	4
12	1	8	13

3	8	13	10
14	11	2	7
1	6	9	8
16	9	4	5

13	2	11	8
6	15	4	9
3	10	5	16
12	7	14	1

15	6	3	10
4	11	14	5
13	8	1	12
2	9	16	7

występują na przemian liczby nieparzyste i liczby parzyste. ([Mat] 1-2/1955 61).

5.3.8. *Udowodnić, że liczb* $1, 2 \ldots, 16$ *nie można wstawić w* 4×4 *kwadrat magiczny tak, aby w górnej jego połowie były same liczby nieparzyste, a w dolnej same liczby parzyste.* ([Mat] 1-2/1955 61).

D. Przypuśćmy, że taki kwadrat magiczny istnieje. Wtedy suma wszystkich liczb występujących w pierwszym i drugim wierszu jest sumą wszystkich liczb nieparzystych od 1 do 15; jest więc równa 64. Suma ta jednak musi być równa $68 = 2 \cdot 34$. Mamy zatem sprzeczność. ⊠

W ten sam sposób wykazujemy, że w rozważanych kwadratach magicznych nie może być dwóch wierszy składających się z samych liczb nieparzystych. Można udowodnić, że nawet nie może być jednego takiego wiersza; dokładniej:

5.3.9. *W każdym kwadracie magicznym stopnia* 4*, zbudowanym z liczb od* 1 *do* 16*, każdy wiersz składa się z dwóch liczb nieparzystych i dwóch liczb parzystych. To samo dotyczy kolumn. Przekątne natomiast mogą składać się z samych liczb nieparzystych lub samych liczb parzystych* (*patrz przykłady w* 5.3.7).

5.3.10 (Maple). *Modulo* 2 *każdy kwadrat magiczny stopnia* 4*, zbudowany z liczb od* 1 *do* 16*, ma jedną z następujących* 24 *postaci.*

1	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1

1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	1	0	1

1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0

1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1

1	0	1	0
0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0

1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0

1	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0

1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1

1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

1	0	1	0
1	1	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1

1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1

0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

0	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0

0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	0	0

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

5.3.11. *Przykłady kwadratów magicznych stopnia* 4*, zbudowanych z liczb od* 1 *do* 16*, odpowiadające odpowiednio kwadratom modulo* 2 *podanym w* 5.3.10*.*

1	2	15	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	11	6	9

1	2	15	16
13	14	3	4
12	7	10	5
8	11	6	9

1	2	16	15
13	14	4	3
12	7	9	6
8	11	5	10

1	3	14	16
10	13	4	7
15	6	11	2
8	12	5	9

1	3	14	16
15	13	4	2
10	6	11	7
8	12	5	9

1	4	13	16
8	15	2	9
14	5	12	3
11	10	7	6

1	4	14	15
16	11	5	2
9	6	12	7
8	13	3	10

1	5	16	12
8	14	3	9
10	4	13	7
15	11	2	6

1	5	16	12
10	14	3	7
15	11	6	2
8	4	9	13

1	5	16	12
15	14	3	2
10	11	6	7
8	4	9	13

1	6	11	16
7	15	2	10
14	4	13	3
12	9	8	5

1	6	11	16
14	15	2	3
7	4	13	10
12	9	8	5

2	1	15	16
14	13	3	4
11	8	10	5
7	12	6	9

2	1	16	15
11	13	4	6
14	8	9	3
7	12	5	10

2	1	16	15
14	13	4	3
11	8	9	6
7	12	5	10

2	3	13	16
15	12	6	1
10	5	11	8
7	14	4	9

2	3	14	15
7	16	1	10
13	6	11	4
12	9	8	5

2	3	14	15
8	16	1	9
11	5	12	6
13	10	7	4

2	3	14	15
11	16	1	6
8	5	12	9
13	10	7	4

2	4	13	15
14	16	3	1
7	5	10	12
11	9	8	6

2	4	15	13
5	14	3	12
16	7	10	1
11	9	6	8

2	6	15	11
7	13	4	10
9	3	14	8
16	12	1	5

2	6	15	11
9	13	4	8
16	12	5	1
7	3	10	14

2	6	15	11
16	13	4	1
9	12	5	8
7	3	10	14

5.3.12. *W kwadracie magicznym stopnia* 4*, zbudowanym z liczb* $1, 2, \dots, 16$*, w lewym górnym rogu jest* 1*, a w prawym dolnym rogu jest* 16*. Wykazać, że suma dowolnych dwóch liczb, symetrycznych względem środka, jest równa* 17*.* ([Kw] 7/1973 27).

U. Przykład takiego kwadratu magicznego podany jest w 5.3.3. Oto inny przykład:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

([Kw] 7/1973 27). ⊠

Powyższy fakt jest szczególnym przypadkiem następującego stwierdzenia.

5.3.13. *Jeśli w kwadracie magicznym stopnia* 4*, zbudowanym z liczb* $1, 2, \dots, 16$*, w lewym górnym rogu jest liczba* a*, a w prawym dolnym rogu jest* $17 - a$*, to suma dowolnych dwóch liczb, symetrycznych względem środka, jest równa* 17*.*

Można udowodnić nawet więcej:

5.3.14. *Jeśli w kwadracie magicznym stopnia* 4*, zbudowanym z liczb* $1, 2, \ldots, 16$*, istnieją dwie symetryczne liczby, których suma jest równa* 17*, to suma dowolnych dwóch liczb, symetrycznych względem środka, jest równa* 17*.*

5.3.15. *Kwadrat magiczny*

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

jest również magiczny jeśli odwrócimy go do góry nogami. ([Mon] 9/2000 821).

5.3.16. *Kwadraty magiczne stopnia* 4*, których lustrzane odbicia są również kwadratami magicznymi.*

74	45	13	66
27	52	88	31
86	33	25	54
11	68	72	47

47	54	31	66
72	25	88	11
68	33	52	45
11	86	27	74

83	32	26	57
58	25	31	84
15	68	74	41
42	73	67	16

38	23	62	77
85	52	13	48
51	86	47	14
24	37	76	61

Suma magiczna wszystkich kwadratów jest równa 198*.* ([Behf]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.4 Kwadraty magiczne z liczbami pierwszymi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Istnieją kwadraty magiczne zbudowane z samych liczb pierwszych.

5.4.1 ([Gr08])**.** *Kwadraty magiczne stopnia* 3 *z liczbami pierwszymi.*

17	89	71
113	59	5
47	29	101

41	89	83
113	71	29
59	33	101

5.4.2 ([Gr08])**.** *Kwadraty magiczne stopnia* 4 *z liczbami pierwszymi.*

37	83	97	41
53	61	71	73
89	67	59	43
79	47	31	101

41	71	103	61
97	79	47	53
37	67	83	89
101	59	43	73

W 2005 roku B.Green i T.Tao ([G-T]) udowodnili, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele n-wyrazowych postępów arytmetycznych utworzonych z parami różnych liczb pierwszych. W [N-4] można znaleźć różne zastosowania tego twierdzenia. Następujące twierdzenie jest również konsekencją twierdzenia Greena i Tao.

5.4.3 (A. Granville 2008)**.** *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 3$ *istnieje kwadrat magiczny stopnia* n *zbudowany z samych liczb pierwszych. Ponadto, takich kwadratów jest nieskończenie wiele.* ([Gr08]).

D. ([Gr08]). Niech $n \geqslant 3$. Dobrze wiadomo, że istnieje co najmniej jeden kwadrat magiczny stopnia n zbudowany z liczb naturalnych $1, 2, \ldots, n^2$. Niech K będzie jednym z takich kwadratów. Dla każdej pary (i, j), gdzie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, oznaczmy przez K_{ij} liczbę występującą w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tego kwadratu K.

Niech $A = \{a+jd;\ j = 1, \ldots, n^2\}$ będzie n^2-wyrazowym ciągiem arytmetycznym liczb pierwszych. Taki ciąg istnieje na mocy wspomnianego wyżej twierdzenia Greena i Tao. Rozpatrzmy kwadratową $n \times n$ macierz $M = [M_{ij}]$ taką, że $M_{ij} = a + (K_{ij})\, d$, dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Macierz ta jest $n \times n$ kwadratem magicznym zbudowanym z samych liczb pierwszych. Ponieważ zbiorów postaci A istnieje (na mocy twierdzenia Greena i Tao) nieskończenie wiele, więc rozważanych kwadratów magicznych istnieje również nieskończenie wiele. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.5 Dodatkowe informacje o kwadratach magicznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.5.1. *Kwadraty magiczne stopnia* 5.

1	18	21	22	3
20	14	9	16	6
19	15	13	11	7
2	10	17	12	24
23	8	5	4	25

13	21	19	2	10
4	7	15	23	16
25	18	1	9	12
6	14	22	20	3
17	5	8	11	24

5.5.2. *Wyznacznik kwadratu magicznego stopnia n, utworzonego z liczb $1, 2, \ldots, n^2$, jest podzielny przez n^2 gdy n jest nieparzyste i jest podzielny przez $n^2 + 1$, gdy n jest parzyste.* ([MM] 38(1)(1965) 56).

★ R. Alter, *How many latin squares are there?* [Mon] 82(6)(1975) 632-634.
A. F. Beardon, *The dimension of the space of magic squares*, [MG] 87(508)(2003) 112-114.
K. Brown, *Solving magic squares.*
E. Emanouilidis, *Construction of Pythagorean magic squares*, [MG] 89(514)(2005) 99-101.
E. J. Finan, *Magic rectangles modulo p*, [Mon] 52(9)(1945) 502-506.
A. Mąkowski, *O kwadracie magicznym* 13×13 *złożonym z liczb pierwszych*, [Dlt] 3/1979.
T. Natkaniec, *Kwadraty magiczne o stałym iloczynie*, [Dlt] 5/1976 8-9.
L. J. Ratliff, Jr., *The dimension of the magic square vector space*, [Mon] 66(9)(1959) 793-795.
B. Rokowska, *O kwadratach łacińskich i problemie Eulera*, [Mat] 2/1961 69-70.
P. Rosiak, *Algorytm USM budowy kwadratów magicznych*, [Pmgr] 2003.
W. Szewelew, *Prostokąty łacińskie*, [Kw] 5/1990 6-9.
K. Szymański, *Kwadrat magiczny i algebra*, [Mat] 2/1977 67-70.
M. Trenkler, *Magic cubes*, [MG] 82 493(1998) 56-61.
S. Vaithianathan, *Bourdered magic squares of odd order*, [MG] 495(1998) 438-442.
L. M. Weiner, *The algebra of semi-magic squares*, [Mon] 62(1955) 237-239.
Figury magiczne, [Jel] 153-187.
Kwadraty magiczne, [Hodi] 219-247.
Magiczne figury liczbowe i kwadraty magiczne, [Kord] 277-322.

5.6 Trójkątne tablice liczbowe

5.6.1. *Trójkątna tablica liczbowa zbudowana jest następująco. W górnym wierzchołku znajduje się liczba naturalna $a > 1$. Pod każdą liczbą k po lewej stronie jest k^2, a po prawej $k+1$. Na przykład, dla $a = 2$ początkowe wiersze tablicy mają postać:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 2 & & & & & & & \\
 & & & 4 & & & & & & & & 3 & & & \\
 & 16 & & & & 5 & & & & 9 & & & & 4 & \\
64 & & 17 & & 25 & & 6 & & 81 & & 10 & & 16 & & 5
\end{array}$$

Wykazać, że w każdym wierszu wszystkie liczby są parami różne. ([Kw] 4/1973 47).

5.6.2. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją taką, że $f(n+1) - f(n) > n+1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Trójkątna tablica liczbowa zbudowana jest następująco. W górnym wierzchołku znajduje się liczba naturalna $a > 1$. Pod każdą liczbą k po lewej stronie jest $f(k)$, a po prawej $k+1$. Na przykład, dla $a = 2$ początkowe wiersze tablicy mają postać:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2 & & & \\
 & f(2) & & & & 3 & \\
ff(2) & & f(2)+1 & & f(3) & & 4
\end{array}$$

Wykazać, że w każdym wierszu wszystkie liczby są parami różne. ([Kw] 4/1973 47).

5.7 Konikówka i szachownica

1	16	11	22	7
10	21	8	17	12
15	2	23	6	25
20	9	4	13	18
3	14	19	24	5

W polu oznaczonym przez 1 znajdował się konik szachowy. Z tego pola skoczył na pole 2, potem na pole 3, itd, aż do pola 25, na którym się zatrzymał. Obiegł w ten sposób wszystkie pola kwadratu 5×5 i na każdym polu był dokładnie jeden raz. Jego droga jest zilustrowana przy pomocy powyższej 5×5 macierzy. Tego rodzaju macierz nazywać będziemy *konikówką stopnia* 5. W podobny sposób definiujemy konikówki stopnia n.

5.7.1. *Nie istnieje żadna konikówka stopnia* 4. ([Mat] 1-2/1955 59).

5.7.2. *Konikówki* 5×5*:*

1	22	11	16	7
12	17	8	21	10
23	2	25	6	15
18	13	4	9	20
3	24	19	14	5

1	16	21	10	7
22	11	8	15	20
17	2	25	6	9
12	23	4	19	14
3	18	13	24	5

1	22	17	12	3
16	11	2	25	18
21	8	23	4	13
10	15	6	19	24
7	20	9	14	5

1	16	11	22	7
10	21	8	17	12
15	2	23	6	25
20	9	4	13	18
3	14	19	24	5

5.7.3 (J. Śniatycki). *Dla każdej szachownicy kwadratowej o boku* $(4n+1)$ *istnieje konikówka o początku w środku szachownicy i końcu w prawym górnym rogu.* ([Mat] 4/1959 216).

Przykład dla 5×5:

23	6	17	12	25
16	11	24	7	2
5	22	1	18	13
10	15	20	3	8
21	4	9	14	19

5.7.4. *Konikówki* 6×6*:*

1	10	21	28	7	12
22	29	8	11	20	27
9	2	33	26	13	6
32	23	30	17	36	19
3	16	25	34	5	14
24	31	4	15	18	35

1	10	19	26	7	12
20	27	8	11	18	25
9	2	33	24	13	6
28	21	30	15	36	17
3	32	23	34	5	14
22	29	4	31	16	35

1	30	9	20	3	32
10	21	2	31	16	19
29	8	27	18	33	4
22	11	34	15	26	17
7	28	13	24	5	36
12	23	6	35	14	25

5.7.5. *Konikówki* 7×7*:*

1	40	17	38	3	30	27
18	37	2	29	26	33	4
41	16	39	34	43	28	31
36	19	42	25	32	5	44
15	22	35	48	45	8	11
20	47	24	13	10	49	6
23	14	21	46	7	12	9

1	4	15	24	27	6	39
14	29	2	5	40	23	26
3	16	45	28	25	38	7
30	13	32	41	34	49	22
17	44	19	46	37	8	35
12	31	42	33	10	21	48
43	18	11	20	47	36	9

5.7.6. ([StaZ] 28). *Nie istnieje konikówka* 7×7 *rozpoczynająca się od poniżej zaznaczonego pola.*

				*		

5.7.7. *Nie istnieje żadna konikówka* 7×7*, w której pole początkowe sąsiaduje (w tej samej kolumnie lub w tym samym wierszu) z polem końcowym.* ([StaZ] 29).

5.7.8. *Konikówki* 8×8*:*

1	26	3	18	23	30	13	16
4	19	24	29	14	17	34	31
25	2	27	22	35	32	15	12
20	5	56	49	28	47	36	33
57	64	21	46	55	50	11	40
6	45	58	61	48	39	52	37
63	60	43	8	51	54	41	10
44	7	62	59	42	9	38	53

1	40	13	28	3	26	47	52
14	29	2	45	48	53	4	25
41	12	39	56	27	46	51	54
30	15	44	49	64	55	24	5
11	42	63	38	57	50	61	36
16	31	18	43	62	37	6	23
19	10	33	58	21	8	35	60
32	17	20	9	34	59	22	7

5.7.9. *Konikówki* 8 × 8 ([Kw] 9/1971 53)*:*

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

5.7.10. *Konikówki stopni* 9 *i* 10*:*

1	34	3	16	31	80	63	14	29
4	17	32	81	64	15	30	79	62
33	2	35	58	69	78	75	28	13
18	5	70	65	74	59	68	61	76
53	36	57	40	71	66	77	12	27
6	19	54	73	56	41	60	67	46
37	52	39	22	49	72	45	26	11
20	7	50	55	42	9	24	47	44
51	38	21	8	23	48	43	10	25

1	18	39	42	15	20	99	24	13	22
38	41	16	19	94	43	14	21	86	25
17	2	73	40	45	100	87	98	23	12
50	37	46	95	76	93	44	85	26	91
3	72	49	74	47	88	97	92	11	62
36	51	80	77	96	75	84	63	90	27
69	4	71	48	81	78	89	28	61	10
52	35	68	79	66	55	64	83	58	29
5	70	33	54	7	82	31	56	9	60
34	53	6	67	32	65	8	59	30	57

5.7.11. *Konikówka* 11 × 11*:*

1	90	65	26	3	28	79	72	5	30	33
66	25	2	101	80	71	4	29	32	73	6
91	64	89	70	27	106	81	78	75	34	31
24	67	102	109	100	87	76	107	82	7	74
63	92	69	88	113	108	105	86	77	56	35
68	23	110	103	94	99	112	83	58	85	8
45	62	93	114	111	104	95	98	55	36	57
22	115	44	61	96	121	52	59	84	9	54
43	46	117	120	51	60	97	16	53	12	37
116	21	48	41	118	19	50	39	14	17	10
47	42	119	20	49	40	15	18	11	38	13

5.7.12. *Konikówka* 12 × 12*:*

1	4	29	38	33	6	31	40	127	8	119	42
28	35	2	5	30	39	126	7	120	41	128	9
3	24	37	34	111	32	121	138	125	130	43	118
36	27	84	23	122	135	124	131	116	137	10	129
25	22	77	112	85	110	139	136	143	132	117	44
76	83	26	103	80	123	134	115	140	45	142	11
21	78	81	86	113	102	109	144	133	58	65	46
82	75	90	79	104	107	114	101	66	141	12	59
71	20	87	106	89	100	95	108	57	60	47	64
74	91	72	99	94	105	54	67	96	63	50	13
19	70	93	88	17	68	97	56	15	52	61	48
92	73	18	69	98	55	16	53	62	49	14	51

5.7.13. *Z kwadratu $n \times n$, gdzie $n > 4$, wycięto środkowy kwadrat $(n-2)\times(n-2)$. Pozostałą figurę można obejść konikiem szachowym (będąc na każdym polu dokładnie jeden raz) wtedy i tylko wtedy, gdy $4 \mid n-1$.* ([Kw] 8/1972 64).

5.7.14. *Na nieskończonej szachownicy stoi skoczek. Ile jest pól, które może on osiągnąć w n posunięciach?* ([Mat] 1/1960 55).

R. Oznaczmy szukaną liczbę pól przez s_n (pola startowego nie uwzględniamy). Mamy wówczas: $s_1 = 8$, $s_2 = 40$, $s_3 = 108$ oraz $s_n = 14n^2 - 6n + 3$ dla $n \geqslant 4$. ⊠

5.7.15. *Skoczek zrobił n ruchów na szachownicy 8×8 i wrócił na swoje pole wyjściowe. Wykazać, że n jest liczbą parzystą.* ([StaZ] 27).

5.7.16. *Na szachownicy 4×2 nie można ustawić 5 skoczków tak, aby żadne dwa nie biły się.* ([StaZ] 18).

5.7.17. *Jaką maksymalną liczbę skoczków można ustawić na szachownicy 8×8 tak, aby żadne dwa nie biły się?* Odp. 32. ([StaZ] 19).

5.7.18. *Po nieskończonej szachownicy porusza się (m,n)-koń, czyli figura, która w każdym ruchu przemieszcza się o m pól poziomo i n pól pionowo - lub odwrotnie. Wyznaczć wszystkie liczby naturalne m,n, dla których (m,n)-koń, startując z dowolnego pola szachownicy, może osiągnąć każde inne pole.* Odp. *Liczby naturalne m,n spełniają warunek zadania wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{nwd}(m,n) = 1$ *oraz* $2 \mid (m+n-1)$. ([Dlt] 9/1996).

5.7.19. *Pola szachownicy 8×8 ponumerowano w następujący sposób:*

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Następnie ustawiono 8 wież tak, że żadne dwie się nie biją. Jaką wartość może przyjąć liczba będąca sumą numerów pól, na których stoją wieże? Odp. 260. ([StaZ] 16).

5.7.20. *Niech A będzie lewym górnym polem szachownicy 8×8 i niech B będzie prawym dolnym polem tej szachownicy. Wykazać, że wieża nie może przejść z pola A do pola B przechodząc przez wszystkie pola szachownicy i nie przechodząc przez żadne pole dwa razy.* ([StaZ] 26).

5.7.21. *Jaką maksymalną liczbę króli można ustawić na szachownicy 8×8 tak, aby żadne dwa nie biły się?* Odp. 16. ([StaZ] 17).

★ D. Cohen, *Metryka konika szachowego*, [Kw] 10/1981 13-16.
A. Esain, *EBM oprowierajet*, [Kw] 8/1976 28-29.
E. J. Gik, *Szachmatno-matematiczeskije zamietki*, [Kw] 9/1971 52-55.
E. J. Gik, *Gry matematyczne na szachowych polach*, [Kw] 4/1975 54-59.
R. K. Guy, *The n queens problem*, [Gy04] 200-203.
J. Hernander, L. Robert, *Figures of constant width on a chessboard*, [Mon] 1(112)(2005) 42-50.
E. Hódi, *Matematyka na szachownicy*, [Hodi] 17-23.
Sz. Jeleński, *Zadania konikowe*, [Jel] 239-247.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.8 Liczby na tablicy

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.8.1. *Na tablicy wypisano liczby* $1, 2, \ldots, 1974$. *Następnie wybrano dwie liczby* a, b *i zamiast nich napisano liczbę* $a + b$ *lub* $a - b$. *Operację tę powtarzano tak długo, aż pozostała jedna liczba* a. *Wykazać, że* $a \neq 0$. ([WyKM] 622-74).

5.8.2. *Na tablicy wypisano liczby* $1, 2, \ldots, 20$. *Następnie wybrano dwie liczby* a, b *i zamiast nich napisano liczbę* $a+b-1$. *Operację tę powtórzono* 19 *razy. Pozostała jedna liczba. Jaka?* Odp. 191. ([G-if] 142).

5.8.3. *Na tablicy wypisano liczby* $1, 2, \ldots, 20$. *Następnie wybrano dwie liczby* a, b *i zamiast nich napisano liczbę* $ab+a+b$. *Operację tę powtórzono* 19 *razy. Pozostała jedna liczba. Jaka?* ([G-if] 143).

5.8.4. *Na tablicy wypisano liczby* $1, 2, \ldots, 1989$. *Następnie starto dwie liczby* a, b *i zamiast nich napisano liczbę* $a-b$. *Operację tę powtórzono kilka razy. Czy można w ten sposób otrzymać same zera?* ([G-if] 143).

O. Nie. Parzystość sumy wypisanych liczb jest niezmiennikiem tej operacji. ⊠

5.8.5. *Na tablicy wypisano liczby* $1, 2, \ldots, 50$. *Następnie wybrano dwie liczby* a, b *i zamiast nich napisano liczbę* $|a - b|$. *Operację tę powtórzono kilka razy, tak długo aż pozostała tylko jedna liczba. Jaka to może być liczba?* Odp. *W ten sposób można otrzymać każdą liczbę naturalną nieparzystą mniejszą od* 50. ([Kw] 6/1975 24).

5.8.6. *Na tablicy wypisano liczby* $1, 2, \ldots, 9$. *Następnie starto jedną z tych liczb i napisano tę liczbę powiększoną o* 3 *lub o* 5. *Operację tę powtórzano kilka razy, tak długo aż wszystkie liczby na tablicy stały się jednakowe. Jaka jest minimalna liczba takich operacji?* Odp. 28 *operacji; otrzymamy liczby równe* 17. ([OM] Rosja 1997/1998).

5.8.7. *Na tablicy wypisano* 10 *dwójek. Następnie starto dwie liczby i zamiast nich napisano ich sumę lub ich iloczyn. Operację tę powtórzono kilka razy, tak długo aż pozostała tylko jedna liczba. Czy liczba, która pozostała może być równa* 1002 *?*
Odp. *Nie.* ([OM] St Petersburg 1998).

5.8.8. *Na tablicy wypisano* 11 *dwójek. Następnie starto dwie liczby i zamiast nich napisano ich sumę lub ich iloczyn. Operację tę powtórzono kilka razy, tak długo aż pozostała tylko jedna liczba. Czy liczba, która pozostała może być równa* 774 *?* Odp. *Nie.* ([OM] St Petersburg 1998).

5.8.9. *Na tablicy napisano* 128 *jedynek. Wybraną parę* (a, b) *liczb z tablicy zamieniamy liczbą* $ab + 1$. *Niech* A *będzie maksymalną liczbą, którą można otrzymać po* 127 *takich operacjach. Znaleźć ostatnią cyfrę liczby* A. Odp. 2. ([Fom] 49/92).

5.8.10. *Na tablicy napisano trzy liczby całkowite. Jedną liczbę starto i zamiast niej napisano sumę dwóch pozostałych liczb zmniejszoną o* 1. *Operację tę powtórzono kilka razy i otrzymano liczby* $17, 1967, 1983$. *Czy na początku mogły być napisane liczby: a)* $2, 2, 2$; *b)* $3, 3, 3$? Odp. *a) Nie. b) Tak.* ([WaJ] 350(83)).

5.8.11. *Jeśli* a *jest daną liczbą naturalną większą od* 4, *to rozbijamy ją na dwa składniki naturalne większe od jedynki i zamiast* a *rozpatrujemy iloczyn tych składników. Wykazać, że startując od dowolnej liczby naturalnej większej od* 4 *można, przy pomocy powyższych operacji, otrzymać potęgę liczby* 10. ([OM] St Petersburg 1992, [Fom] 22/92).

R. Najpierw doprowadzamy łatwo do liczby $A = 10^m k$. Potem: $A = 10^m + 10^m(k-1)$ i stąd mamy nową liczbę $A = 10^{2m}(k-1)$, itd. ⊠

5.8.12. *Jeśli* r *jest liczbą rzeczywistą* $\geqslant 1$, *to wybieramy jedną z liczb:* $2r$ *lub* $r/(r-1)$. *Z nową liczbą postępujemy podobnie itd. Niech* $1 \leqslant a < b$ *będą liczbami rzeczywistymi. Wykazać, że startując od liczby* 2 *można przy pomocy powyższej operacji otrzymać liczbę* c *taką, że* $a < c < b$. ([Bryn] 6.7).

5.8.13. *Jeśli* r *jest liczbą rzeczywistą z przedziału* $(0, 1)$, *to wybieramy jedną z liczb:* $r/2$ *lub* $1 - r$. *Z nową liczbą postępujemy podobnie itd. Wykazać, że startując od liczby* $1/2$ *można przy pomocy powyższej operacji otrzymać każdą liczbę postaci* $n/2^m$, *gdzie* $m, n \in \mathbb{N}$, $n < 2^m$. ([Bryn] s.138).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.9 Liczby na okręgu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.9.1. *Na końcach pięciu średnic danego okręgu rozmieszczono liczby od* 1 *do* 10. *Na ile sposobów można te liczby tak ustawić, aby suma każdych dwóch sąsiednich liczb była równa sumie liczb leżących na przeciwległych końcach średnic wyznaczonych przez te liczby.* ([Mat] 4/1959 213).

O. Istotnie różnych ustawień (tzn. odrzucając symetryczne oraz powstałe przez obrót) jest 24. Przykłady: $(1, 2), (4, 3), (5, 6), (8, 7), (9, 10)$; $(1, 6), (7, 2), (3, 8), (9, 4), (5, 10)$. ⊠

5.9.2. *Na okręgu jest* 60 *liczb, z których każda jest równa* 1 *lub* -1. *Iloczyn każdych trzech kolejnych liczb jest równy* -1. *Znaleźć sumę wszystkich liczb.* ([Kw] 4/1978 41).

5.9.3. *Na okręgu wypisano kilka liczb. Jeśli cztery kolejne liczby* a, b, c, d *są takie, że* $(a - d)(b - c) < 0$, *to liczby* b *i* c *można zamienić miejscami. Wykazać, że operację tę można wykonać tylko skończenie wiele razy.* ([Kw] 8/1972 60).

5.9.4. *Liczby naturalne od* 1 *do* 1000 *wypisane są kolejno na okręgu. Poczynając od pierwszej z tych liczb wykreślamy co piętnastą liczbę (tzn.* $1, 16, 31, \dots$*), przy czym w dalszych powtórnych okrążeniach wykreślamy liczby ponownie. Ile liczb pozostaje nie wykreślonych?* Odp. 800. ([Mat] 4/1949 47).

5.9.5. *Na okręgu dane są punkty $A_1, A_2, \dots, A_{16}$. Budujemy wszystkie możliwe wielokąty wypukłe o wierzchołkach w tych punktach. Wielokąty te dzielimy na dwie klasy zaliczając do jednej klasy wielokąty, które mają punkt A_1 za jeden z wierzchołków, a do drugiej klasy te wielokąty, których żadnym wierzchołkiem nie jest punkt A_1. W której klasie jest więcej wielokątów.* ([OM] Moskwa 1953, [Mat] 6/1954 50).

5.9.6. *Na okręgu napisano w dowolnej kolejności* 4 *jedynki i* 5 *zer. Następnie pomiędzy dwiema liczbami równymi wpisano zero, pomiędzy liczbami różnymi wpisano jedynkę i starto liczby napisane na początku. Czynność tę powtórzono kilka razy. Wykazać, że nie można w ten sposób otrzymać samych zer.* ([Kw] 8/1971 41).

5.9.7. *Czy można rozmieścić na okręgu* 1995 *liczb naturalnych w ten sposób, że dla każdych sąsiednich liczb a i b liczba $|a-b|$ jest pierwsza?* Odp. *Nie.* ([Kw] 5/1995).

5.9.8. *Dowieść, że jeżeli przy okrągłym stole siedzi co najmniej* 5 *osób, to można je tak przesadzić, że każda osoba będzie miała obu sąsiadów innych niż poprzednio.*
([Str72] 64, [B-rs] 212).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.10 Żetony

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.10.1. *Na stole leży n żetonów oznaczonych liczbami całkowitymi. Jeśli wśród tych żetonów znajdują się dwa oznaczone równymi liczbami, np. liczbą k, to zastępujemy je jednym żetonem z liczbą $k+1$ i jednym żetonem z liczbą $k-1$. Wykazać, że po skończonej liczbie takich zamian wszystkie żetony będą oznaczone parami różnymi liczbami.* ([Bryn] 7.14).

5.10.2. *Danych jest n kolorowych żetonów, przy czym żetonów każdego koloru jest co najwyżej $n/2$. Wykazać, że żetony te można ustawić na okręgu tak, że każde dwa sąsiednie żetony mają inny kolor.* ([Kw] 11/1974 42).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.11 Piątek trzynastego

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.11.1. *Czy istnieje rok, w którym żaden trzynasty dzień miesiąca nie jest piątkiem?* Odp. *Nie istnieje.* ([Mat] 4/1974 249).

5.11.2. *Każdego roku trzynasty dzień miesiąca jest piątkiem co najmniej jeden raz i co najwyżej trzy razy.* ([Mon] 70(7)(1963) E1541).

R. (Bay Area MO 1999). Oznaczmy dni tygodnia liczbami $0,1,2,3,4,5,6$ i stosujmy arytmetykę modulo 7. Niech x będzie dniem tygodnia 1-go stycznia badanego roku. Wtedy 13-ty dzień stycznia jest dniem $x+5$. Jeśli rok nie jest przestępny, to 13-ty lutego jest dniem $x+1$, tym samym dniem jest 13-ty marca. Jeśli rok jest przestępny, to 13-ty lutego jest dniem $x+1$, a 13-ty marca dniem $x+2$. Kontynuując mamy:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
zw	$x+5$	$x+1$	$x+1$	$x+4$	$x+6$	$x+2$	$x+4$	x	$x+3$	$x+5$	$x+1$	$x+3$
prz	$x+5$	$x+1$	$x+2$	$x+5$	x	$x+3$	$x+5$	$x+1$	$x+4$	$x+6$	$x+2$	$x+4$

Piątki 13-tego, w zależności od dnia 1-go stycznia, przedstawiają się więc następująco:

1 stycznia	rok zwykły	rok przestępny
niedziela	styczeń, październik,	styczeń, kwiecień, lipiec,
poniedziałek	kwiecień, lipiec,	wrzesień, grudzień,
wtorek	wrzesień, grudzień,	czerwiec,
środa	czerwiec,	marzec, listopad,
czwartek	luty, marzec, listopad,	luty, sierpień,
piątek	sierpień,	maj,
sobota	maj,	październik

W szczególności, jeśli rok nie jest przestępny i 1-go stycznia przypada w czwartek, to piątek 13-tego jest trzy razy: w lutym, marcu i listopadzie. Jeśli rok nie jest przestępny i 1-go stycznia przypada w środę, to piątek 13-tego jest tylko jeden raz, w czerwcu. ⊠

5.11.3. *Rozpatrzmy* 400 *kolejnych lat. W tym okresie trzynasty dzień w miesiącu występuje* 4800 *razy w tym niedziel jest* 687*, poniedziałków* 685*, wtorków* 685*, śród* 687*, czwartków* 684*, piątków* 699 *i sobót* 684*. Najczęściej więc trzynasty dzień miesiąca jest piątkiem.*
([Mon] 40(3)(1933) E36).

★ *Calendaria*, [Je88] 36-70.
Który dzień tygodnia?, [Kw] 12/1989 36-39.

6 Sumy i iloczyny

Spójrzmy na następujące równości:

$$2+2=2\cdot 2, \quad 1+2+3=1\cdot 2\cdot 3, \quad \frac{4}{3}+\frac{7}{6}+\frac{9}{2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{2}.$$

W każdej z tych równości występują liczby, których suma jest równa ich iloczynowi. Tego rodzaju przykładów istnieje znacznie więcej. Poznamy je w tym rozdziale. Zajmować się będziemy rozwiązaniami równania postaci

$$\boxed{x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n},$$

gdzie $n \geqslant 2$.

6.1 Suma równa iloczynowi; przykłady

6.1.1. *Wszystkie rozwiązania naturalne, z dokładnością do permutacji, równania*

$$x_1+\cdots+x_n=x_1\cdots x_n$$

przedstawiają się $($*dla danych* $n=1,\ldots,9)$ *następująco:*

$(n=2)$*:* $(2,2)$*;*

$(n=3)$*:* $(1,2,3)$ ([S59] 171, [Str72] 17)*;*

$(n=4)$*:* $(1,1,2,4)$ ([S59] 172, [Str72] 18)*;*

$(n=5)$*:* $(1,1,1,2,5)$, $(1,1,1,3,3)$, $(1,1,2,2,2)$. ([S59] 173)*;*

$(n=6)$*:* $(1,1,1,1,2,6)$. ([S59] 174*);*

$(n=7)$*:* $(1,1,1,1,1,2,7)$, $(1,1,1,1,1,3,4)$*;*

$(n=8)$*:* $(1,1,1,1,1,1,2,8)$, $(1,1,1,1,1,2,2,3)$*;*

$(n=9)$*:* $(1,1,1,1,1,1,1,2,9)$, $(1,1,1,1,1,1,1,3,5)$.

D. Dla $n=3$ mamy:

$$x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3 \leqslant 3x_3,$$

skąd $x_1x_2 \leqslant 3$. Para (x_1,x_2) jest zatem jedną z par $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$. Szybko stwierdzamy, że możliwy jest tylko przypadek $(x_1,x_2)=(1,2)$ i w tym przypadku $x_3=3$, Do zbioru $A(3)$ należy więc tylko jeden element $(1,2,3)$.

Niech $n=4$. Ponieważ

$$x_1x_2x_3x_4=x_1+x_2+x_3+x_4<4x_4$$

(przypadek $x_1=x_2=x_3=x_4$ jest oczywiście niemożliwy), więc $x_1x_2x_3 \leqslant 3$. Trójka (x_1,x_2,x_3) jest zatem jedną z trójek $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$. Jedynie przypadek $(x_1,x_2,x_3)=(1,1,2)$ nie prowadzi do sprzeczności. Do zbioru $A(4)$ należy tylko element $(1,1,2,4)$.

Dla $n = 5$ postępujemy podobnie. Najpierw zauważamy, że

$$x_1x_2x_3x_4 \leqslant 4$$

i stą wnioskujemy, że (x_1, x_2, x_3, x_4) może być jedynie jedną z czwórek $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 1, 1, 4)$, $(1, 1, 2, 2)$. Czwórki $(1, 1, 1, 1)$ i $(1, 1, 1, 4)$ nie są dobre. Dla nich nie znajdziemy odpowiedniej liczby x_5. Z pozostałych trzech czwórek otrzymamy wszystkie elementy zbioru $A(5)$: $(1, 1, 1, 2, 5)$, $(1, 1, 1, 3, 3)$ i $(1, 1, 2, 2, 2)$. ⊠

Tabele od 6.1.2 do 6.1.10 przedstawiają wszystkie rozwiązania naturalne, z dokładnością do permutacji, równania

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$$

dla $n = 10, \ldots, 99$. W każdym wierszu wypisano kolejno: n, liczbę rozwiązań, liczbę jedynek występujących w każdym rozwiązaniu, wszystkie rozwiązania bez wspólnych jedynek.

6.1.2. $n = 10, \ldots, 20$.

10	2	8	$(2, 10)$, $(4, 4)$,
11	3	8	$(1, 2, 11)$, $(1, 3, 6)$, $(2, 2, 4)$,
12	2	8	$(1, 1, 2, 12)$, $(2, 2, 2, 2)$,
13	4	10	$(1, 2, 13)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 3)$,
14	2	11	$(1, 2, 14)$, $(2, 2, 5)$,
15	2	13	$(2, 15)$, $(3, 8)$,
16	2	14	$(2, 16)$, $(4, 6)$,
17	4	14	$(1, 2, 17)$, $(1, 3, 9)$, $(1, 5, 5)$, $(2, 2, 6)$,
18	2	15	$(1, 2, 18)$, $(2, 3, 4)$,
19	4	15	$(1, 1, 2, 19)$, $(1, 1, 3, 10)$, $(1, 1, 4, 7)$, $(2, 2, 2, 3)$,
20	2	17	$(1, 2, 20)$, $(2, 2, 7)$.

6.1.3. $n = 21, \ldots, 30$.

21	4	18	$(1, 2, 21)$, $(1, 3, 11)$, $(1, 5, 6)$, $(3, 3, 3)$,
22	2	20	$(2, 22)$, $(4, 8)$,
23	4	20	$(1, 2, 23)$, $(1, 3, 12)$, $(2, 2, 8)$, $(2, 3, 5)$,
24	1	22	$(2, 24)$,
25	5	22	$(1, 2, 25)$, $(1, 3, 13)$, $(1, 4, 9)$, $(1, 5, 7)$, $(2, 4, 4)$,
26	4	22	$(1, 1, 2, 26)$, $(1, 1, 6, 6)$, $(1, 2, 2, 9)$, $(2, 2, 2, 4)$,
27	3	22	$(1, 1, 1, 2, 27)$, $(1, 1, 1, 3, 14)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$,
28	3	25	$(1, 2, 28)$, $(1, 4, 10)$, $(2, 3, 6)$,
29	5	26	$(1, 2, 29)$, $(1, 3, 15)$, $(1, 5, 8)$, $(2, 2, 10)$, $(3, 3, 4)$,
30	2	26	$(1, 1, 2, 30)$, $(2, 2, 3, 3)$.

6.1.4. $n = 31, \dots, 40.$

31	4	29	$(2,31),\ (3,16),\ (4,11),\ (6,7),$
32	3	29	$(1,2,32),\ (2,2,11),\ (2,4,5),$
33	5	29	$(1,1,2,33),\ (1,1,3,17),\ (1,1,5,9),\ (1,2,3,7),\ (2,2,2,5),$
34	2	32	$(2,34),\ (4,12),$
35	3	32	$(1,2,35),\ (1,3,18),\ (2,2,12),$
36	2	34	$(2,36),\ (6,8),$
37	6	34	$(1,2,37),\ (1,3,19),\ (1,4,13),\ (1,5,10),\ (1,7,7),\ (3,3,5),$
38	3	35	$(1,2,38),\ (2,2,13),\ (2,3,8),$
39	3	36	$(1,2,39),\ (1,3,20),\ (2,4,6),$
40	4	36	$(1,1,2,40),\ (1,1,4,14),\ (1,3,4,4),\ (2,2,2,6).$

6.1.5. $n = 41, \dots, 50.$

41	7	37	$(1,1,2,41),\ (1,1,3,21),\ (1,1,5,11),\ (1,1,6,9),\ (1,2,2,14),$ $(1,2,5,5),\ (2,2,3,4),$
42	2	37	$(1,1,1,2,42),\ (2,2,2,2,3),$
43	5	40	$(1,2,43),\ (1,3,22),\ (1,4,15),\ (1,7,8),\ (2,3,9),$
44	2	41	$(1,2,44),\ (2,2,15),$
45	4	42	$(1,2,45),\ (1,3,23),\ (1,5,12),\ (3,3,6),$
46	4	43	$(1,2,46),\ (1,4,16),\ (1,6,10),\ (2,4,7),$
47	5	43	$(1,1,2,47),\ (1,1,3,24),\ (1,2,2,16),\ (2,2,2,7),\ (2,3,3,3),$
48	2	45	$(1,2,48),\ (2,3,10),$
49	5	47	$(2,49),\ (3,25),\ (4,17),\ (5,13),\ (7,9),$
50	4	47	$(1,2,50),\ (1,8,8),\ (2,2,17),\ (2,5,6).$

6.1.6. $n = 51, \dots, 60.$

51	4	48	$(1,2,51),\ (1,3,26),\ (1,6,11),\ (3,4,5),$
52	3	48	$(1,1,2,52),\ (1,1,4,18),\ (2,2,3,5),$
53	7	50	$(1,2,53),\ (1,3,27),\ (1,5,14),\ (2,2,18),\ (2,3,11),\ (2,4,8),\ (3,3,7),$
54	2	50	$(1,1,2,54),\ (2,2,2,8),$
55	5	52	$(1,2,55),\ (1,3,28),\ (1,4,19),\ (1,7,10),\ (4,4,4),$
56	4	52	$(1,1,2,56),\ (1,1,6,12),\ (1,2,2,19),\ (2,2,4,4),$
57	5	52	$(1,1,1,2,57),\ (1,1,1,3,29),\ (1,1,1,5,15),\ (1,1,1,8,9),\ (2,2,2,2,4),$
58	4	52	$(1,1,1,1,2,58),\ (1,1,1,1,4,20),\ (1,1,1,2,3,12),\ (2,2,2,2,2,2),$
59	4	56	$(1,2,59),\ (1,3,30),\ (2,2,20),\ (2,5,7),$
60	2	57	$(1,2,60),\ (2,4,9).$

6.1.7. $n = 61, \ldots, 70.$

61 9 57 $(1,1,2,61)$, $(1,1,3,31)$, $(1,1,4,21)$, $(1,1,5,16)$,
$(1,1,6,13)$, $(1,1,7,11)$, $(1,2,6,6)$, $(1,3,3,8)$, $(2,2,2,9)$,

62 3 59 $(1,2,62)$, $(2,2,21)$, $(3,4,6)$,

63 4 59 $(1,1,2,63)$, $(1,1,3,32)$, $(1,2,3,13)$, $(2,2,3,6)$,

64 4 60 $(1,1,2,64)$, $(1,1,4,22)$, $(1,1,8,10)$, $(2,3,3,4)$,

65 7 60 $(1,1,1,2,65)$, $(1,1,1,3,33)$, $(1,1,1,5,17)$, $(1,1,1,9,9)$,
$(1,1,2,2,22)$, $(1,1,3,5,5)$, $(2,2,2,3,3)$,

66 2 64 $(2,66)$, $(6,14)$,

67 5 64 $(1,2,67)$, $(1,3,34)$, $(1,4,23)$, $(1,7,12)$, $(2,4,10)$,

68 5 64 $(1,1,2,68)$, $(1,2,2,23)$, $(1,2,3,14)$, $(1,2,5,8)$, $(2,2,2,10)$,

69 4 66 $(1,2,69)$, $(1,3,35)$, $(1,5,18)$, $(3,3,9)$,

70 3 67 $(1,2,70)$, $(1,4,24)$, $(4,4,5)$.

6.1.8. $n = 71, \ldots, 80.$

71 6 67 $(1,1,2,71)$, $(1,1,3,36)$, $(1,1,6,15)$, $(1,1,8,11)$, $(1,2,2,24)$, $(2,2,4,5)$,

72 3 67 $(1,1,1,2,72)$, $(1,1,2,6,7)$, $(2,2,2,2,5)$,

73 9 69 $(1,1,2,73)$, $(1,1,3,37)$, $(1,1,4,25)$, $(1,1,5,19)$, $(1,1,7,13)$, $(1,1,9,10)$,
$(1,2,3,15)$, $(1,3,4,7)$, $(3,3,3,3)$,

74 4 70 $(1,1,2,74)$, $(1,2,2,25)$, $(1,2,4,11)$, $(2,2,3,7)$,

75 3 71 $(1,1,2,75)$, $(1,1,3,38)$, $(2,2,2,11)$,

76 3 74 $(2,76)$, $(4,26)$, $(6,16)$,

77 6 74 $(1,2,77)$, $(1,3,39)$, $(1,5,20)$, $(2,2,26)$, $(2,5,9)$, $(3,3,10)$,

78 3 75 $(1,2,78)$, $(1,8,12)$, $(2,3,16)$,

79 5 76 $(1,2,79)$, $(1,3,40)$, $(1,4,27)$, $(1,7,14)$, $(3,5,6)$,

80 2 77 $(1,2,80)$, $(2,2,27)$.

6.1.9. $n = 81, \ldots, 90.$

81 7 77 $(1,1,2,81)$, $(1,1,3,41)$, $(1,1,5,21)$, $(1,1,6,17)$,
$(1,1,9,11)$, $(1,2,4,12)$, $(2,3,3,5)$,

82 4 78 $(1,1,2,82)$, $(1,1,4,28)$, $(1,1,10,10)$, $(2,2,2,12)$,

83 5 80 $(1,2,83)$, $(1,3,42)$, $(2,2,28)$, $(2,3,17)$, $(2,6,8)$,

84 2 81 $(1,2,84)$, $(3,4,8)$,

85 10 81 $(1,1,2,85)$, $(1,1,3,43)$, $(1,1,4,29)$, $(1,1,5,22)$, $(1,1,7,15)$,
$(1,1,8,13)$, $(1,2,7,7)$, $(1,3,3,11)$, $(1,4,4,6)$, $(2,2,3,8)$,

86 5 82 $(1,1,2,86)$, $(1,1,6,18)$, $(1,2,2,29)$, $(1,2,5,10)$, $(2,2,4,6)$,

87 4 82 $(1,1,1,2,87)$, $(1,1,1,3,44)$, $(1,2,3,4,4)$, $(2,2,2,2,6)$,

88 5 83 $(1,1,1,2,88)$, $(1,1,1,4,30)$, $(1,1,2,3,18)$, $(1,1,2,4,13)$, $(2,2,2,3,4)$,

89 8 83 $(1,1,1,1,2,89)$, $(1,1,1,1,3,45)$, $(1,1,1,1,5,23)$, $(1,1,1,1,9,12)$,
$(1,1,1,2,2,30)$, $(1,1,1,4,5,5)$, $(1,1,2,2,2,13)$, $(2,2,2,2,2,3)$,

90 2 86 $(1,1,2,90)$, $(2,2,5,5)$.

6.1.10. $n = 91, \dots, 99$.

91	6	89	$(2,91)$, $(3,46)$, $(4,31)$, $(6,19)$, $(7,16)$, $(10,11)$,
92	3	89	$(1,2,92)$, $(1,8,14)$, $(2,2,31)$,
93	6	90	$(1,2,93)$, $(1,3,47)$, $(1,5,24)$, $(2,3,19)$, $(3,3,12)$, $(3,5,7)$,
94	3	91	$(1,2,94)$, $(1,4,32)$, $(2,6,9)$,
95	6	92	$(1,2,95)$, $(1,3,48)$, $(2,2,32)$, $(2,4,14)$, $(2,5,11)$, $(3,4,9)$,
96	5	92	$(1,1,2,96)$, $(1,1,6,20)$, $(1,3,6,6)$, $(2,2,2,14)$, $(2,2,3,9)$,
97	6	95	$(2,97)$, $(3,49)$, $(4,33)$, $(5,25)$, $(7,17)$, $(9,13)$,
98	5	94	$(1,1,2,98)$, $(1,2,2,33)$, $(1,2,3,20)$, $(1,2,7,8)$, $(2,3,3,6)$,
99	4	95	$(1,1,2,99)$, $(1,1,3,50)$, $(1,1,8,15)$, $(3,3,3,4)$.

6.1.11. *Tabela przedstawia wszystkie rozwiązania naturalne, z dokładnością do permutacji, równania* $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$ *dla* $n = 100, 200, \dots, 1000$. *W każdym wierszu wypisano kolejno: n, liczbę rozwiązań, liczbę jedynek występujących w każdym rozwiązaniu, wszystkie rozwiązania bez wspólnych jedynek.*

100	5	95	$(1,1,1,2,100)$, $(1,1,1,4,34)$, $(1,1,1,10,12)$, $(1,1,4,4,7)$, $(2,2,3,3,3)$,
200	6	196	$(1,1,2,200)$, $(1,2,2,67)$, $(1,2,4,29)$, $(1,2,10,11)$, $(1,4,6,9)$, $(2,3,3,12)$,
300	3	297	$(1,2,300)$, $(1,14,24)$, $(3,6,18)$,
400	8	396	$(1,1,2,400)$, $(1,1,4,134)$, $(1,1,8,58)$, $(1,1,20,22)$, $(1,2,9,24)$, $(1,4,4,27)$, $(1,6,7,10)$, $(2,3,5,14)$,
500	7	494	$(1,1,1,1,2,500)$, $(1,1,1,2,2,167)$, $(1,1,1,2,5,56)$, $(1,1,1,2,14,19)$, $(1,1,2,2,6,22)$, $(1,1,2,4,5,13)$, $(2,2,2,4,4,4)$,
600	4	596	$(1,1,2,600)$, $(1,2,6,55)$, $(1,6,8,13)$, $(2,2,2,86)$,
700	11	694	$(1,1,1,1,2,700)$, $(1,1,1,1,4,234)$, $(1,1,1,3,4,64)$, $(1,1,1,4,4,47)$, $(1,1,1,4,13,14)$, $(1,1,2,5,8,9)$, $(1,1,2,6,6,10)$, $(1,1,3,3,8,10)$, $(1,1,3,4,5,12)$, $(1,2,2,2,9,10)$, $(2,2,2,2,3,15)$,
800	9	795	$(1,1,1,2,800)$, $(1,1,1,18,48)$, $(1,1,2,2,267)$, $(1,1,2,7,62)$, $(1,1,2,20,21)$, $(1,2,2,3,73)$, $(1,2,3,4,35)$, $(1,2,4,4,26)$, $(2,2,3,3,23)$,
900	4	897	$(1,2,900)$, $(1,30,32)$, $(2,4,129)$, $(4,9,26)$,
1000	6	996	$(1,1,2,1000)$, $(1,1,4,334)$, $(1,1,10,112)$, $(1,1,28,38)$, $(1,4,4,67)$, $(4,4,4,16)$.

6.1.12. *Równanie* $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$ *dla* $n = 2000$ *posiada* 10 *rozwiązań naturalnych, z dokładnością do permutacji. W każdym rozwiązaniu jest* 1993 *jedynek. Rozwiązania bez wspólnych jedynek są następujące:*

$(1,1,1,1,1,2,2000)$, $(1,1,1,1,2,2,667)$, $(1,1,1,1,2,16,65)$, $(1,1,1,1,2,22,47)$,
$(1,1,1,1,3,6,118)$, $(1,1,1,1,6,17,20)$, $(1,1,1,2,2,2,286)$, $(1,1,1,2,2,16,32)$,
$(1,1,2,2,3,13,13)$, $(2,2,2,3,3,4,7)$.

6.1.13. *Równanie* $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$ *dla* $n = 3000$ *posiada* 11 *rozwiązań naturalnych, z dokładnością do permutacji. W każdym rozwiązaniu jest* 2994 *jedynek. Rozwiązania bez* *wspólnych jedynek są następujące:*

$(1,1,1,1,2,3000)$, $(1,1,1,2,4,429)$, $(1,1,1,4,9,86)$, $(1,1,2,2,3,273)$,
$(1,1,2,4,6,64)$, $(1,1,2,5,6,51)$, $(1,2,2,2,19,20)$, $(1,2,2,3,11,23)$,
$(1,2,3,7,8,9)$, $(1,3,3,4,7,12)$, $(2,2,3,3,6,14)$.

6.1.14. *Równanie* $x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$ *dla* $n=4000$ *posiada* 13 *rozwiązań naturalnych, z dokładnością do permutacji. W każdym rozwiązaniu jest* 3994 *jedynek. Rozwiązania bez wspólnych jedynek są następujące:*

$(1,1,1,1,2,4000)$, $(1,1,1,1,4,1334)$, $(1,1,1,1,32,130)$, $(1,1,1,1,44,94)$,
$(1,1,1,2,10,211)$, $(1,1,1,3,4,364)$, $(1,1,1,4,4,267)$, $(1,1,1,4,14,73)$,
$(1,1,4,6,12,14)$, $(1,1,4,7,9,16)$, $(1,2,2,7,8,18)$, $(1,2,4,4,6,21)$,
$(2,2,2,3,8,21)$.

6.1.15. *Równanie* $x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$ *dla* $n=5000$ *posiada* 13 *rozwiązań naturalnych, z dokładnością do permutacji. W każdym rozwiązaniu jest* 4994 *jedynek. Rozwiązania bez wspólnych jedynek są następujące:*

$(1,1,1,1,2,5000)$, $(1,1,1,2,2,1667)$, $(1,1,1,2,5,556)$, $(1,1,1,2,6,455)$,
$(1,1,1,2,17,152)$, $(1,1,1,2,50,51)$, $(1,1,2,2,15,85)$, $(1,1,2,5,11,46)$,
$(1,1,2,10,14,18)$, $(1,1,3,7,10,24)$, $(1,1,4,4,15,21)$, $(1,2,2,3,3,143)$,
$(2,2,2,3,7,30)$.

6.1.16. *Równanie* $x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$ *dla* $n=10\,000$ *posiada* 19 *rozwiązań naturalnych, z dokładnością do permutacji. W każdym rozwiązaniu jest* 9994 *jedynek. Rozwiązania bez wspólnych jedynek są następujące:*

$(1,1,1,1,2,10000)$, $(1,1,1,1,4,3334)$, $(1,1,1,1,10,1112)$, $(1,1,1,1,12,910)$,
$(1,1,1,1,34,304)$, $(1,1,1,1,100,102)$, $(1,1,1,2,4,1429)$, $(1,1,1,4,4,667)$,
$(1,1,1,4,9,286)$, $(1,1,1,4,16,159)$, $(1,1,1,4,32,79)$, $(1,1,1,6,8,213)$,
$(1,1,1,7,36,40)$, $(1,1,1,12,15,56)$, $(1,1,2,3,4,435)$, $(1,1,2,4,9,141)$,
$(1,2,3,4,6,70)$, $(1,3,3,6,6,31)$, $(2,2,3,3,9,31)$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2 Suma równa iloczynowi; własności

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2.1. *Dla każdej liczby naturalnej* n *równanie*

$$x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych; na przykład:

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=1, \quad x_{n-1}=2, \quad x_n=n.$$

([S59] 174, [B-zm] 16).

6.2.2. *Dla każdej liczby naturalnej* $n>1$ *równanie*

$$x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$$

ma skończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([S59] 175).

6.2.3. *Jeśli* $x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$, *gdzie* $n \geqslant 3$ *oraz* $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ *są liczbami naturalnymi, to*

$$x_1x_2\cdots x_{n-1} \leqslant n-1.$$

D. Zauważmy, że wszystkie liczby $x_1,\dots,x_n$ nie mogą być równe. Przypuśćmy bowiem, że $x_1 = \cdots = x_n = x$. Wtedy $x^n = nx$ i stąd $x = \sqrt[n-1]{n}$. Ale $1 < \sqrt[n-1]{n} < 2$ dla $n \geqslant 3$, więc mamy sprzeczność. Zatem,

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n = x_1+x_2+\cdots+x_n < nx_n. \quad \boxtimes$$

6.2.4. *Jeśli* $x_1,\dots,x_n$, *gdzie* $n \geqslant 2$, *są takimi liczbami naturalnymi, że* $x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n$, *to*

$$x_1+\cdots+x_n \leqslant 2n.$$

([Crux] 1990 s.82, [OM] Polska 1989/1990).

D. Niech b_n oznacza liczbę jedynek w ciągu $(x_1,\dots,x_n) \in A(n)$. Oznaczmy przez k liczbę tych liczb w ciągu $(x_1,\dots,x_n)$, które są większe od jedynki. Liczby większe od jedynki oznaczmy odpowiednio przez $y_1+1,\ y_2+1,\ \dots,\ y_k+1$, gdzie $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_k$. Oczywiście $k \geqslant 2$, $b_n + k = n$ oraz

$$(y_1+1)(y_2+1)\dots(y_k+1) = y_1+y_2+\cdots+y_k+k+b_n. \tag{1}$$

Niech $k=2$. Wtedy $y_1y_2 = n-1$ i stąd $y_1+y_2 \leqslant 1+n-1 = n$, a zatem

$$x_1+\cdots+x_n = n+y_1+y_2 \leqslant 2n,$$

przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, gdy $y_1 = 1$, $y_2 = n-1$, tzn. tylko wtedy, gdy

$$(x_1,\dots,x_n) = (1,1,\dots,1,2,n).$$

Niech $k \geqslant 3$. Wtedy z równości (1) otrzymujemy:

$$y_1+\cdots+y_k \leqslant y_1y_2+y_2y_3+\cdots+y_ky_1 < (y_1+1)(y_2+1)\dots(y_k+1)-(y_1+\cdots+y_k) = n.$$

Zatem, $x_1+\cdots+x_n = y_1+\cdots+y_k+n < 2n$. ⊠

6.2.5. *Niech* $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ *będą takimi liczbami naturalnymi, że*

$$x_1+\cdots+x_n = x_1\cdots x_n.$$

Oznaczmy przez b_n *liczbę jedynek występujących w ciągu* $(x_1,\dots,x_n)$. *Wtedy*

$$b_n \geqslant n-1-[\log_2 n].$$

Równość zachodzi na przykład wtedy, gdy n *jest liczbą postaci* $2^s - s$ (*gdzie* $s \geqslant 2$) *oraz*

$$(x_1,\dots,x_n) = (1,\dots,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{s}).$$

D. Z 6.2.4 wynika, że: $2^{n-b_n} \leqslant x_1\cdots x_n = x_1+\cdots+x_n = 2n$. Zatem $n-b_n \leqslant \log_2(2n) = 1+\log_2 n$ i stąd

$$b_n \geqslant n-1-[\log_2 n].$$

Pozostała część tego dowodu jest oczywista. ⊠

6.2.6. *Jeśli* $x_1, \ldots, x_n$, *gdzie* $n \geqslant 2$, *są takimi liczbami naturalnymi, że* $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$, *to*

$$x_1^s + \cdots + x_n^s \geqslant (s+1)n$$

dla $s \geqslant n-1$. ([Zw] 1994).

6.2.7. *Dla każdej liczby naturalnej* k *istnieje liczba naturalna* n *taka, że równanie*

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$$

ma więcej niż k *rozwiązań naturalnych.* ([S59] 175).

6.2.8. *Jeśli* $n \geqslant 5$ *jest liczbą nieparzystą, to układ*

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n, \quad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$$

ma co najmniej dwa rozwiązania naturalne.

D. Niech $n = 2k+1$, $k \geqslant 2$. Jednym rozwiązaniem jest:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1, \quad x_{n-1} = 2, \quad x_n = n.$$

Drugie rozwiązanie:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1, \quad x_{n-1} = 3, \quad x_n = k+1. \quad \boxtimes$$

6.2.9. *Jeśli* $n = ab+1$, *gdzie* $2 \leqslant a \leqslant b$, *to układ*

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n, \qquad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$$

ma co najmniej dwa rozwiązania naturalne.

D. Jednym rozwiązaniem jest: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = n$. Drugie rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = a+1$, $x_n = b+1$. $\boxtimes$

6.2.10. *Jeśli* n *jest liczbą naturalną mającą jedną z postaci*

$$3k+2, \quad 5k+3, \quad 7k+4, \quad 7k+5, \quad 8k+5,$$

to układ $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, *ma co najmniej dwa rozwiązania naturalne.*

D. Jednym rozwiązaniem jest zawsze $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = n$.
Drugie rozwiązania:
$n = 3k+2$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-3} = 1$, $x_{n-2} = 2$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = k+1$.
$n = 5k+3$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-3} = 1$, $x_{n-2} = 2$, $x_{n-1} = 3$, $x_n = k+1$.
$n = 7k+4$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-3} = 1$, $x_{n-2} = 2$, $x_{n-1} = 4$, $x_n = k+1$.
$n = 7k+5$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-4} = 1$, $x_{n-3} = 2$, $x_{n-2} = 2$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = k+1$.
$n = 8k+5$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-3} = 1$, $x_{n-2} = 3$, $x_{n-1} = 3$, $x_n = k+1$. $\boxtimes$

6.2.11. *Rozpatrzmy układ:* $x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n, \qquad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$

(1) *Jeśli n jest jedną z liczb*

$$24, \quad 114, \quad 174, \quad 444,$$

to układ ten posiada tylko jedno rozwiązanie naturalne.

(2) *Czy istnieje liczba naturalna n większa od 444, dla której układ ten ma tylko jedno rozwiązanie? Sprawdzono, że takiej liczby nie ma dla $n \leqslant 1\,440\,000$* ([Gy04] 300).

(3) *Czy jeśli układ ten ma tylko jedno rozwiązanie (dla $n > 6$), to ostatnią cyfrą liczby n jest 4?*

(4) *Jeśli układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, to $n-1$ jest liczbą pierwszą.*

Dowód. *Wynika to z* 6.2.9.

(5) *Jeśli układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, to $6 \mid n$.*

6.2.12 (Singmaster-Bennett-Dunn)**.** *Rozpatrzmy układ:*

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n, \qquad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

(1) *Istnieje* 49 *liczb naturalnych n mniejszych od* 1 200 000*, dla których układ ten posiada dokładnie dwa rozwiązania. Największą taką liczbą n jest* 6324*. Liczba $n = 6174$ też ma tę własność.*

(2) *Istnieje* 78 *liczb naturalnych n mniejszych od* 1 200 000*, dla których układ ten posiada dokładnie trzy rozwiązania. Największą taką liczbą n jest* 11 874*. Liczba $n = 7\,220$ też ma tę własność.* ([Gy04] 300).

★ M. L. Brown, *On the diophantine equation* $\sum X_i = \prod X_i$, [MatC] 42(1984) 239-240.
M.W. Ecker, *When does a sum of positive integers equal their product?*, [MM] 75(1)(2002) 41-47.
R. K. Guy, *Sum equals product*, [Gy04] 299-300.
L. Kourliandtchik, A. Nowicki, *When the sum equals the product*, [MG] March 2000.
D. Singmaster, M. Bennett, A. Dunn, *Sum = product sequences*, preprint 1988 ([Gy04] 300).
[Mon] 82(1)(1975) 78-80, [Mon] 9(1971) 1021-1022.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3 Suma równa iloczynowi; liczby całkowite

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3.1. *Trójki* $(1,2,3)$ *i* $(-1,-2,-3)$ *są jedynymi, z dokładnością do permutacji, niezerowymi całkowitymi rozwiązaniami równania*

$$x + y + z = xyz.$$

([S59] 172).

6.3.2. *Czwórki* $(1,1,2,4)$ *i* $(-1,-2,-2,1)$ *są jedynymi, z dokładnością do permutacji, całkowitymi rozwiązaniami równania*

$$x + y + z + t = xyzt.$$

([Str72] s.44).

6.3.3. *Niech $x_1, \dots, x_n$ będą takimi liczbami całkowitymi, że*

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1 \cdots x_n.$$

Jeśli $2 \mid n$, to $4 \mid x_1 \cdots x_n$.

D. Niech n będzie liczbą parzystą. Przypuśćmy, że wszystkie liczby $x_1, \dots, x_n$ są nieparzyste. Mamy wówczas parzystą liczbę liczb nieparzystych. Suma jest więc parzysta. Ale suma jest równa iloczynowi, więc iloczyn jest parzysty. Zatem jedna z liczb $x_1, \dots, x_n$ jest parzysta. Sprzeczność.

Co najmniej więc jedna z liczb jest parzysta. Suma wszystkich liczb (jako, że jest równa iloczynowi) jest zatem parzysta. Wśród liczb tych muszą więc być co najmniej dwie liczby parzyste. ⊠

6.3.4. *Mówimy, że liczba naturalna n jest SI-liczbą jeśli istnieje n takich liczb całkowitych $x_1, \dots, x_n$ (niekoniecznie różnych), że*

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.$$

Przykład: 8 jest SI-liczbą, gdyż

$$8 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + (-1) + (-1).$$

(1) *Każda liczba postaci $4k$ lub $4k+1$ jest SI-liczbą* ([OM] Indie 1995).

(2) *Liczba naturalna n jest SI-liczbą $\iff n \equiv 0, 1 \pmod 4$ oraz $n \neq 4$.*

([Mon] 4(1998) z.10454).

★ J. Pla, *On triples of integers having the same sum and the same product*, [MG] 90(518)(2006) 276-279.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4 Suma równa iloczynowi; liczby wymierne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4.1 (R. Liu). *Oznaczmy przez A zbiór tych wszystkich liczb naturalnych n, dla których istnieje liczba naturalna $k \geqslant 2$ oraz istnieją takie dodatnie liczby wymierne $a_1, \dots, a_k$, że*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k.$$

Dla przykładu, liczby 6 i 11 należą do zbioru A, gdyż:

$$1 + 2 + 3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \frac{1}{2} + 1 + 4 + \frac{11}{2} = 11 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{11}{2}.$$

Do zbioru A należy liczba 4 i należy każda liczba naturalna większa od 5. Liczby $1, 2, 3, 5$ nie należą do zbioru A. Mamy więc:

$$A = \{4, 6, 7, 8, 9, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 5\}.$$

([OM] USA 2006).

D. ([SPom], [OM] USA 2006). Najpierw pokażemy, że każda liczba parzysta większa od 2 należy do zbioru A. Niech $n = 2k$, gdzie $2 \leqslant k \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg $(a_1, \dots, a_k) = (k, 2, 1, 1, \dots, 1)$ posiada żądaną własność. Liczby $a_1, \dots, a_k$ są wymierne i dodatnie oraz

$$a_1 + \cdots + a_k = 2k = n = a_1 \cdot \cdots \cdot a_k.$$

Załóżmy teraz, że $n \geqslant 9$ jest liczbą nieparzystą. Niech $n = 2k + 3$, gdzie $3 \leqslant k \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy ciąg

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 4, 1, 1, \dots, 1).$$

Łatwo sprawdzić, że $a_1 + \cdots + a_k = 2k + 3 = n = a_1 \cdot \cdots \cdot a_k$. Każda więc liczba nieparzysta większa od 7 należy do zbioru A. Z równości

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{6} + \frac{9}{2} = 7 = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{2}$$

wynika, że liczba 7 również należy do zbioru A.

Pozostały liczby $1, 2, 3, 5$. Udowodnimy, że one nie należą do zbioru A. Niech $n \in \{1, 2, 3, 5\}$ i przypuśćmy, że $n \in A$. Niech $k \geqslant 2$ i niech $a_1, \dots a_k$ będą dodatnimi liczbami wymiernymi spełniającymi rozpatrywane równości. Wykorzystując znaną nierówność o średnich (średnia geometryczna nie jest większa od średniej arytmetycznej), otrzymujemy:

$$\sqrt[k]{n} = \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = \frac{n}{k}$$

i stąd mamy nierówność $n \geqslant k^{k/(k-1)}$. Łatwo sprawdzić, że jeśli $k \geqslant 3$, to $k^{k/(k-1)} > 5$, czyli $n > 5$; sprzeczność z tym, że $n \in \{1, 2, 3, 5\}$. Pozostaje jedynie przypadek $k = 2$. Ten przypadek również prowadzi do sprzeczności. Z równości $a_1 + a_2 = n = a_1 a_2$ wynika, że $a_1^2 - n a_1 + n = 0$ i stąd dalej wynika, że a_1 nie jest liczbą wymierną. ⊠

6.4.2. *Wszystkie niezerowe rozwiązania wymierne równania*

$$x + y = xy$$

są postaci

$$x = \frac{p}{q}, \quad y = \frac{p}{p - q},$$

gdzie $p, q \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, $p \neq q$.

D. Niech $x = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, $\mathrm{nwd}(p, q) = 1$. Niech $y = a/b$, $a, b \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, $\mathrm{nwd}(a, b) = 1$. Z równości $x + y = xy$ otrzymujemy równość

$$pb + qa = pa,$$

z której wynika, że $a = up$ dla pewnego całkowitego $u \neq 0$. Stąd otrzymujemy, że $b = u(p - q)$ i mamy: $y = \dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{p - q}$. ⊠

6.4.3. *Jeśli* a, b, c *są takimi dodatnimi liczbami, że*

$$a + b + c = abc,$$

to co najmniej jedna z tych liczb jest większa od $\dfrac{17}{10}$. ([OM] Łotwa 1994).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5 Suma równa iloczynowi; liczby rzeczywiste

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5.1. *Załóżmy, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi takimi, że*

$$a + b + c = abc.$$

Wtedy:

(1) $a(1-b^2)(1-c^2) + b(1-c^2)(1-a^2) + c(1-b^2)(1-c^2) = 4abc$, ([IMO] Longlist 1985);

(2) $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$, *gdy a, b, c są różne od ± 1*, ([AFe] 108);

(3) $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$, ([AFe] 127);

(4) $a^5(bc-1) + b^5(ca-1) + c^5(ab-1) \geqslant 54\sqrt{3}$, *gdy $a, b, c > 0$*, ([Crux] 2001 s.403);

(5) $x + y + z = xyz$, *gdzie* $x = \frac{2a}{1-a^2}$, $y = \frac{2b}{1-b^2}$, $z = \frac{2c}{1-c^2}$, ([Mon] 28(5)(1921) 230);

(6) $x + y + z = xyz$, *gdzie* $x = \frac{3a-a^3}{1-3a^2}$, $y = \frac{3b-b^3}{1-3b^2}$, $z = \frac{3c-c^3}{1-3c^2}$ *oraz*

$$|a| \neq \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad |b| \neq \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad |c| \neq \frac{1}{\sqrt{13}};$$

([IMO] Shortlist 1974, [Djmp] 101(398)).

6.5.2. *Niech a, b, c będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że*

$$a + b + c = abc.$$

Wtedy co najmniej jedna z liczb a, b, c jest większa od $\frac{17}{10}$. Zachodzi fakt ogólniejszy. Jeśli $x_1, \ldots, x_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

to $\max\Big(x_1, \ldots, x_n\Big) \geqslant \sqrt[n-1]{n}$. ([OM] Łotwa 1994, [Crux] 1998 s.135).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.6 Iloczyn minus suma

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.6.1. *Każdą liczbę naturalną można co najmniej na dwa różne sposoby przedstawić w postaci*

$$xy - (x + y),$$

gdzie $x, y \in \mathbb{N}$. ([Mat] 1/1974 58, [Mat] 2/1974 101).

6.6.2. *Dla każdej liczby naturalnej $m > 1$ istnieje liczba naturalna posiadająca dokładnie m różnych przedstawień w postaci*

$$xy - (x + y),$$

gdzie $x, y \in \mathbb{N}$. ([Mat] 3/1974 185).

6.6.3. *Niech $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Każdą liczbę naturalną można na skończoną różną od zera liczbę sposobów przedstawić w postaci*

$$x_1 x_2 \cdots x_s - (x_1 + \cdots + x_s),$$

gdzie $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N}$. ([Mat] 4/1974 251).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.7 Iloczyn równy podwojonej sumie

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla danej liczby naturalnej n interesować nas będą ciągi $(x_1, \dots, x_n)$, takich liczb naturalnych, że:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad \text{oraz} \quad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

Zbiór wszystkich takich ciągów oznaczać będziemy przez $A_2(n)$. Natomiast przez $a_2(n)$ oznaczać będziemy moc zbioru $A_2(n)$, tzn. liczbę wszystkich elementów zbioru $A_2(n)$.

Jest oczywiste, że $a_2(1) = 0$.

6.7.1. *Zbiór $A_2(2)$ ma dokładnie 2 elementy:* $(3, 6)$ *i* $(4, 4)$.

D. Z równanie $x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2)$ jest równoważne równaniu

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 4.$$

Zatem $x_1 - 2 = 1$, $x_2 - 2 = 4$ lub $x_1 - 2 = 2$, $x_2 - 2 = 2$. ⊠

6.7.2. *Jeśli $n \geqslant 3$, to $a_2(n) \geqslant 3$.*

D. Ciągi $(1, 1, \dots, 1, 4, n + 2)$, $(1, 1, \dots, 1, 3, 2n + 2)$, $(1, 1, \dots, 1, 2, 2, n + 1)$ są parami różne i należą do zbioru $A_2(n)$. ⊠

6.7.3. *Zbiór $A_2(n)$ jest skończony (dla każdego n).*

D. Niech $(x_1, \dots, x_n) \in A_2(n)$. Wtedy

$$x_i x_n \leqslant x_1 x_2 \dots x_n = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leqslant 2(x_n + x_n + \cdots x_n) = 2n x_n$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n-1$. Zatem liczby $x_1, \dots, x_{n-1}$ są mniejsze lub równe $2n$. Liczby te wyznaczają liczbę x_n. Przy danych $x_1, \dots, x_{n-1}$ wyraz x_n znajdziemy z równości $x_1 \cdots x_n = 2(x_1 + \cdots + x_n)$. ⊠

6.7.4. *Jeśli $(x_1, \dots, x_n) \in A_2(n)$, $n \geqslant 5$, to $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \leqslant 2n - 1$.*

D. Przypuśćmy najpierw, że $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = y$. Wtedy $y^n = 2ny$, więc $y = \sqrt[n-1]{2n}$ i mamy sprzerczność z tym, że $1 < \sqrt[n-1]{n} < 2$ dla $n \geqslant 5$. Zatem

$$x_1 \cdots x_n = 2(x_1 + \cdots + x_n) < 2nx_n$$

i stąd $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} < 2n$. ⊠

6.7.5. *Liczba $a_2(n)$ oraz elementy zbioru $A_2(n)$ (dla $n = 1, \ldots, 9$) są następujące:*

(1) $a_2(1) = 0$;

(2) $a_2(2) = 2$; $(3,6)$, $(4,4)$;

(3) $a_2(3) = 3$; $(1,3,8)$, $(1,4,5)$, $(2,2,4)$;

(4) $a_2(4) = 5$; $(1,1,3,10)$, $(1,1,4,6)$, $(1,2,2,5)$, $(1,2,3,3)$, $(2,2,2,2)$;

(5) $a_2(5) = 3$; $(1,1,1,3,12)$, $(1,1,1,4,7)$, $(1,1,2,2,6)$;

(6) $a_2(6) = 5$; $(1,1,1,1,3,14)$, $(1,1,1,1,4,8)$, $(1,1,1,1,5,6)$, $(1,1,1,2,2,7)$, $(1,1,1,2,3,4)$;

(7) $a_2(7) = 4$; $(1,1,1,1,1,3,16)$, $(1,1,1,1,1,4,9)$, $(1,1,1,1,2,2,8)$, $(1,1,1,2,2,2,3)$;

(8) $a_2(8) = 5$; $(1,1,1,1,1,1,3,18)$, $(1,1,1,1,1,1,4,10)$, $(1,1,1,1,1,1,6,6)$, $(1,1,1,1,1,2,2,9)$, $(1,1,1,1,1,2,3,5)$;

(9) $a_2(9) = 5$; $(1,1,1,1,1,1,1,3,20)$, $(1,1,1,1,1,1,1,4,11)$, $(1,1,1,1,1,1,1,5,8)$, $(1,1,1,1,1,1,2,2,10)$, $(1,1,1,1,1,1,2,4,4)$.

6.7.6. *Jeśli $(x_1, \ldots, x_n) \in A_2(n)$, to*

$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant 3n + 3$$

i przy tym równość zachodzi tylko w przypadku ciągu

$$(1, 1, \ldots, 1, 3, 2n + 2).$$

D. Niech b_n oznacza liczbę jedynek w ciągu $(x_1, \ldots, x_n) \in A_2(n)$. Oznaczmy przez k liczbę tych liczb w ciągu $(x_1, \ldots, x_n)$, które są większe od jedynki. Liczby większe od jedynki oznaczmy odpowiednio przez

$$y_1 + 1, \ y_2 + 1, \ \ldots, \ y_k + 1,$$

gdzie $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_k$. Oczywiście $k \geqslant 2$, $b_n + k = n$ oraz

$$(*) \qquad (y_1 + 1)(y_2 + 1) \ldots (y_k + 1) = 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_k + n).$$

Niech $k = 2$. Wtedy $y_1 y_2 - y_1 - y_2 + 1 = 2n$, czyli $(y_1 - 1)(y_2 - 1) = 2n$. Stąd

$$y_1 + y_2 = (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + 2 \leqslant 1 + 2n + 2 = 2n + 3,$$

a zatem

$$x_1 + \cdots + x_n = n - 2 + y_1 + y_2 + 2 \leqslant 3n + 3,$$

przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, gdy $y_1 - 1 = 1$, $y_2 - 1 = 2n$, tzn. tylko wtedy, gdy $(x_1, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1, 3, 2n + 2)$.

Niech $k = 3$. Wtedy

$$(y_1 + 1)(y_2 + 1)(y_3 + 1) = 2(y_1 + y_2 + y_3 + n)$$

i stąd

$$y_1 + y_2 + y_3 = y_1y_2y_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 - 2n + 1.$$

Jeśli $y_1 = 1$, to

$$1 + y_2 + y_3 = y_2y_3 + y_2 + y_3 + y_2y_3 + 1 - 2n,$$

czyli $y_2y_3 = n$, skąd $y_2 + y_3 \leqslant 1 + n$ i mamy:

$$x_1 + \cdots + x_n = n - 3 + y_1 + y_2 + y_3 + 3 = n + 1 + y_2 + y_3 \leqslant n + 1 + n + 1 < 3n + 3.$$

Możemy więc założyć, że $y_1 \geqslant 2$. Wtedy

$$y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 2y_2y_3 + 2y_2 + 2y_3 + y_2y_3 + 1 - 2n$$

i stąd $y_1 + y_2 + y_3 + (3y_2y_3 - 2y_1) \leqslant 2n - 1$. Ale $3y_2y_3 > 2y_1$, więc $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 2n - 2$. Zatem

$$x_1 + \cdots + x_n = (n - 3) + y_1 + y_2 + y_3 + 3 \leqslant n - 3 + 3 + 2n - 2 < 3n + 3.$$

Niech teraz $k \geqslant 4$. Wtedy z równości $(*)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
2(y_1 + \cdots + y_k) &= (y_1 + \cdots + y_k) + (y_1 + \cdots + y_k) \\
&\leqslant y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ky_1 + y_1y_2y_3 + y_2y_3y_4 + \cdots + y_ky_1y_2 \\
&\leqslant (y_1 + 1)(y_2 + 1)\cdots(y_k + 1) - (y_1 + \cdots + y_k) - 1 \\
&= 2(y_1 + \cdots + y_k + n) - (y_1 + \cdots + y_k) - 1 \\
&= (y_1 + \cdots + y_k) + 2n - 1.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że $y_1 + \cdots + y_k < 2n$ i konsekwentnie: $x_1 + \cdots + x_n = (n - k) + y_1 + \cdots + y_k + k < n + 2n < 3n + 3$. ⊠

6.7.7. *Niech $(x_1, \ldots, x_n) \in A_2(n)$. Niech b_n oznacza liczbę jedynek w ciągu $(x_1, \ldots, x_n)$. Wtedy*

$$b_n \geqslant n - [\log_2 n] - 2.$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.8 Iloczyn równy m-krotnej sumie

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.8.1. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Każde naturalne rozwiązanie równania*

$$xy = m(x + y)$$

jest postaci $(x, y) = (m+a, m+b)$, gdzie a jest naturalnym dzielnikiem liczby m^2 oraz $b = \dfrac{m^2}{a}$.
([Putn] 1960, [Mon] 68(7)(1961) s.632).

U. Równanie $xy = m(x + y)$ jest równoważne równaniu

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m}.$$

W [N-1] jest podrozdział o tym równaniu. Tam jest również dowód powyższego faktu. ⊠

6.8.2. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Jeśli x, y są takimi liczbami całkowitymi, że*

$$xy = p(x+y),$$

to (x, y) jest jedną z par:

$$(0,0),\ (2p,2p),\ (p-1, p(1-p)),\ (p(1-p), p-1),\ (p+1, p(p+1)),\ (p(p+1), p+1).$$

Wynika to z tego, że równania

$$xy = p(x+y) \quad \textit{oraz} \quad (x-p)(y-p) = p^2$$

są równoważne. ([OM] Hiszpania 1998, [Crux] 2000 s.206).

6.8.3. *Jeśli $x \leqslant y$ są takimi liczbami całkowitymi, że*

$$xy = 1997(x+y),$$

to (x, y) jest jedną z par: $(1998, 399006)$, $(-3986012, 1996)$, $(0,0)$, $(3994, 3994)$.
([OM] Rosja 1997/1998).

Dla danej liczby naturalnej m, rozpatrzmy naturalne rozwiązania (x, y, z) równania

$$m(x+y+z) = xyz$$

takie, że $x \leqslant y \leqslant z$. Oznaczmy przez B_m zbiór wszystkich takich rozwiązań i niech b_m oznacza liczbę elementów tego zbioru. Wspominaliśmy już, że $b_1 = 1$, $b_2 = 3$,

$$B_1 = \Big\{(1,2,3)\Big\}, \quad B_2 = \Big\{(1,3,8), (1,4,5), (2,2,4)\Big\}.$$

Zanotujmy kilka innych przykładów.

6.8.4. $B_3 = \Big\{(1,4,15), (1,5,9), (1,6,7), (2,2,12), (2,3,5), (3,3,3)\Big\}$; $b_3 = 6$.

6.8.5. $B_4 = \Big\{(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9), (2,3,10), (2,4,6)\Big\}$; $b_4 = 5$. ([S59] 95).

6.8.6. $B_5 = \Big\{(1,6,35), (1,7,20), (1,8,15), (1,10,11), (2,3,25), (2,4,10), (2,5,7), (3,4,5)\Big\}$; $b_5 = 8$. ([MG] 90(519)(2006)).

6.8.7. $B_6 = \Big\{(1,7,48), (1,8,27), (1,9,20), (1,12,13), (2,4,18), (2,6,8), (3,3,12), (3,4,7)\Big\}$; $b_6 = 8$. ([Mon] 46(2)(1939) s.108).

6.8.8. $B_7 = \{(1,8,63), (1,9,35), (1,11,21), (1,14,15), (2,4,42), (2,7,9), (3,3,21), (3,5,7)\}$; $b_7 = 8$.

6.8.9. $b_8 = 14$, $b_9 = 13$, $b_{10} = 9$, $b_{11} = 14$, $b_{12} = 17$, $b_{13} = 8$, $b_{14} = 18$, $b_{15} = 23$.

6.8.10. $b_{50} = 39$, $b_{100} = 52$, $b_{140} = 140$, $b_{200} = 153$, $b_{1000} = 264$, (Maple).

Z tych przykładów wynika, że:

6.8.11. *Równanie*

$$200(x+y+z) = xyz$$

ma dokładnie 153 *naturalnych rozwiązań* (x,y,z) *takich, że* $x \leqslant y \leqslant z$. *Natomiast równanie*

$$1000(x+y+z) = xyz$$

ma 264 *takich rozwiązań.*

6.8.12. *Jeśli* m *należy do zbioru* $\{1,2,\dots,100\}$, *to równanie*

$$m(x+y+z) = xyz$$

posiada najwięcej naturalnych rozwiązań $x \leqslant y \leqslant z$, *gdy* $m = 80$. *Równanie*

$$80(x+y+z) = xyz$$

ma 101 *takich rozwiązań.* (Maple).

6.8.13. *Jeśli* m *należy do zbioru* $\{1,2,\dots,500\}$, *to równanie*

$$m(x+y+z) = xyz$$

posiada najwięcej naturalnych rozwiązań $x \leqslant y \leqslant z$, *gdy* $m = 495$. *Równanie*

$$495(x+y+z) = xyz$$

ma 316 *takich rozwiązań.* (Maple).

6.8.14. *Niech* $p > 3$ *będzie liczbą pierwszą i* n *naturalną liczbą nieparzystą. Równanie*

$$xyz = p^n(x+y+z)$$

ma co najmniej $3(n+1)$ *różnych rozwiązań naturalnych* (x,y,z), $x \leqslant y \leqslant z$.
([OM] Czechosłowacja 1986/1987).

Dla danej liczby naturalnej m, rozpatrzmy naturalne rozwiązania (x,y,z) równania

$$m(x+y+z+t) = xyzt$$

takie, że $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$. Oznaczmy przez C_m zbiór wszystkich takich rozwiązańi niech c_m oznacza liczbę elementów tego zbioru. Wspominaliśmy już, że $c_1 = 1$, $c_2 = 5$,

$$C_1 = \Big\{(1,1,2,4)\Big\}, \quad C_2 = \Big\{(1,1,3,10),(1,1,4,6),(1,2,2,5),(1,2,3,3),(2,2,2,2)\Big\}.$$

Zanotujmy kilka innych przykładów.

6.8.15. $C_3 = \Big\{(1,1,4,18),(1,1,6,8),(1,2,2,15),(1,2,3,6)\Big\}$; $c_3 = 4$.

6.8.16. $C_4 = \Big\{(1,1,5,28),(1,1,6,16),(1,1,7,12),(1,1,8,10),(2,2,2,6),(1,3,4,4),$ $(1,2,3,12),(1,2,4,7)\Big\}$; $c_4 = 8$.

6.8.17. $C_5 = \Big\{(1,2,5,8),(1,2,3,30),(1,1,10,12),(1,1,6,40),(2,2,3,5),(2,2,2,10)\Big\}$.

6.8.18. $c_5 = 6,\ \ c_6 = 14,\ \ c_7 = 7,\ \ c_8 = 15,\ \ c_9 = 12,\ c_{10} = 22.$

6.8.19. $c_{20} = 31,\ \ c_{27} = 27,\ \ c_{30} = 68,\ \ c_{50} = 70,\ \ c_{100} = 124.$ (Maple).

6.8.20. *Jeśli* m *należy do zbioru* $\{1,2,\dots,50\}$, *to równanie*

$$m(x+y+z+t) = xyzt$$

posiada najwięcej naturalnych rozwiązań $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$, *gdy* $m = 48$. *Równanie*

$$48(x+y+z+t) = xyzt$$

ma 97 *takich rozwiązań.* (Maple).

6.8.21. *Jeśli* m *należy do zbioru* $\{1,2,\dots,100\}$, *to równanie*

$$m(x+y+z+t) = xyzt$$

posiada najwięcej naturalnych rozwiązań $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$, *gdy* $m = 96$. *Równanie*

$$96(x+y+z+t) = xyzt$$

ma 179 *takich rozwiązań.* (Maple).

★ J. Sandor, *An arithmetic problem in geometry*, [Sand] 53-55. Tutaj jest pewna geometryczna interpretacja równości $xyz = 4(x+y+z)$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.9 Różne fakty i zadania

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.9.1.

(1) $1+6+6 = 2+2+9,\ \ 1\cdot 6\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 9;$

(2) $2+5+27 = 1+15+18,\ \ 2\cdot 5\cdot 27 = 1\cdot 15\cdot 18;$

(3) $7+24+75 = 6+30+70,\ \ 7\cdot 24\cdot 75 = 6\cdot 30\cdot 70;$

(4) $\begin{array}{ccccc} 26785+12789+14976 & = & 26298+16240+12012 & = & 17532+25578+11140 \\ 26785\cdot 12789\cdot 14976 & = & 26298\cdot 16240\cdot 12012 & = & 17532\cdot 25578\cdot 11140 \end{array};$

(5) *Czy są czwórki liczb o tej własności?* ([Dlt] 6/1980).

6.9.2. *Znaleźć wszystkie szóstki* (a,b,c,x,y,z) *liczb naturalnych spełniające układ równań*

$$\begin{cases} a+b+c &= xyz \\ x+y+z &= abc \end{cases}$$

oraz warunki $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$, $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$. ([OM] Polska 1997/1998).

O. Jest siedem takich szóstek: $(2,2,2,6,1,1)$, $(6,1,1,2,2,2)$, $(3,2,1,3,2,1)$, $(3,3,1,7,1,1)$, $(7,1,1,3,3,1)$, $(5,2,1,8,1,1)$, $(8,1,1,5,2,1)$. ⊠

6.9.3. *Niech x, y, z, m będą liczbami naturalnymi takimi, że $x \geqslant y \geqslant z$ oraz*

$$(x+y)(y+z)(z+x) = mxyz.$$

Wtedy (x, y, z, m) jest jedną z czwórek: $(8,1,1,1)$, $(9,2,1,1,)$, $(10,3,2,1)$. ([Dlt] 1/1999 z.365).

6.9.4. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których równanie*

$$(x+y+z)^2 = nxyz$$

ma naturalne rozwiązanie. ([MOc] 2003 z.239).

O. Każda liczba naturalna n należąca do zbioru $\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$ (nie ma 7) spełnia żądany warunek. Innych takich n nie ma. Rozwiązania: $1(9,9,9)$, $2(4,4,8)$, $3(3,3,3)$, $4(2,2,4)$, $5(1,4,5)$, $6(1,2,3), 8(1,1,2), 9(1,1,1)$. ⊠

6.9.5. *Oznaczmy przez $v(n, b)$ liczbę przedstawień liczby naturalnej n w postaci iloczynu jednej lub więcej liczb naturalnych większych od $b \in \mathbb{N}$, przy czym nie uwzględniamy kolejności występowania czynników. Na przykład $v(36,2) = 5$, gdyż*

$$36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$$

Wykazać, że $v(n, b) < \frac{n}{b}$. ([OM] Brazylia 2000).

6.9.6. *Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a + b + c = 407$. Ile maksymalnie zer na końcu może mieć iloczyn abc?* Odp. 6 *dla $a = 250$, $b = 125$, $c = 32$.* ([OM] St Petersburg 2002).

6.9.7. *Znaleźć największą wartość iloczynu liczb naturalnych, których suma równa się danej liczbie naturalnej n.*

(1) $n = 1976$; Odp. $2 \cdot 3^{658}$. ([Br83] 10).

(2) $n = 1979$; Odp. $2 \cdot 3^{659}$. ([Putn] 1979).

(3) $n = 2000$; Odp. $2 \cdot 3^{666}$. ([Zw] 2006).

6.9.8. *Dla danej liczby naturalnej n znaleźć największą wartość iloczynu liczb naturalnych, których suma równa się n.* ([Br83] s.37, [Mat] 2/1998 Z.1412).

O. 3^k dla $n = 3k$; $4 \cdot 3^{k-1}$ dla $n = 3k+1$; $2 \cdot 3^k$ dla $n = 3k+2$. ⊠

6.9.9. *Z cyfr $1, 2, \ldots, 9$ utworzono trzy trzycyfrowe liczby o największym iloczynie. Każdą cyfrę użyto jeden raz. Jakie to liczby?* Odp. $941, 852, 763$. ([OM] St Petersburg 1993).

6.9.10. *Z cyfr $1, 2, \ldots, 9$ utworzono trzy trzycyfrowe liczby o najmniejszym iloczynie. Każdą cyfrę użyto jeden raz. Jakie to liczby?*

★ I. Michajłow, *O diofantycznej analizie*, [Kw] 6/80 16-17.
J. Sandor, *A sum equal to a product*, [Sand] 101-102.
Ch. Small, *on the equation $xyz = x + y + z + 1$*, [Mon] 89(10)(1982) 736-749.

7 Partycje

7.1 Nieuporządkowane sumy ustalonej długości

Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną.

Iloma różnymi sposobami można daną liczbę naturalną n przedstawić w postaci sumy posiadającej dokładnie k składników, z których każdy jest liczbą naturalną?

Chcąc odpowiedzieć na to pytanie należy ustalić najpierw czy przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników uważamy za różne. W tym podrozdziale zakładać będziemy, że takie przedstawienia są różne i liczbę wszystkich takich różnych przedstawień oznaczać będziemy przez $a_k(n)$. Dla przykładu $a_3(6) = 10$, gdyż istnieje dokładnie 10 różnych rozkładów liczby 6 na sumę trzech liczb naturalnych:

$$\begin{array}{ll} 6 = 4+1+1, & 6 = 2+1+3, \\ 6 = 3+2+1, & 6 = 1+4+1, \\ 6 = 3+1+2, & 6 = 1+3+2, \\ 6 = 2+3+1, & 6 = 1+2+3, \\ 6 = 2+2+2, & 6 = 1+1+4. \end{array}$$

Wprowadzona liczba $a_k(n)$ jest liczbą wszystkich ciągów $(x_1, \dots, x_k)$ takich, że

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}.$$

Jest jasne, że $a_1(n) = 1$. Łatwo zauważyć, że $a_2(n) = n - 1$, gdyż wszystkimi rozkładami liczby $n > 1$ na sumę dwóch liczb naturalnych są:

$$(n-1)+1, \quad (n-2)+2, \quad \dots, \quad 1+(n-1).$$

Przejdźmy do rozkładów na sumy trzech składników. Dla $n = 5$ mamy:

$$5 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+3+1 = 1+2+2 = 1+1+3.$$

Jest 6 rozkładów, a zatem $a_3(5) = 6$.

7.1.1. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$a_3(n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

D. Pierwszym składnikiem w rozkładzie liczby n na sumę trzech liczb naturalnych może być dowolna liczba naturalna s mniejsza lub równa $n-2$. Dla danej takiej liczby naturalnej s należy tylko przedstawić liczbę $n - s$ jako sumę dwóch liczb naturalnych, a takich rozkładów jest $a_2(n - s)$, czyli $n - s - 1$. Mamy więc:

$$a_3(n) = a_2(n-1) + a_2(n-2) + \cdots + a_2(2) = (n-2) + (n-3) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

czyli $a_3(n) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. ⊠

Zauważmy, że

$$a_1(n) = 1 = \binom{n-1}{1-1}, \quad a_2(n) = n-1 = \binom{n-1}{2-1},$$
$$a_3(n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{3-1}.$$

W ogólnym przypadku (dla dowolnego k) można wykazać następujące stwierdzenie.

7.1.2. *Dla dowolnych liczb naturalnych k, n zachodzi równość*

$$a_k(n) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Innymi słowy, daną liczbę naturalną n można przedstawić w postaci sumy k liczb naturalnych na dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów (przy założeniu, że przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników są różne).

D. Indukcja ze względu na k. Już wiemy, że tak jest dla $k = 1$ i dowolnego n. Niech $k \geqslant 1$ i załóżmy, że

$$a_k(n) = \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{dla wszystkich} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozpatrzmy rozkłady danej liczby naturalnej n skaładające się z $k+1$ składników. Pierwszym składnikiem w rozkładzie może być dowolna liczba naturalna s mniejsza lub równa $n-k-1$. Dla danej takiej liczby naturalnej s należy tylko przedstawić liczbę $n-s$ jako sumę k liczb naturalnych, a takich rozkładów jest $a_k(n-s)$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} a_{k+1}(n) &= a_k(n-1) + a_k(n-2) + \cdots + a_k(k) \\ &= \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \\ &= \binom{n-1}{k}, \end{aligned}$$

tzn. $a_{k+1}(n) = \binom{n-1}{(k+1)-1}$ i to kończy nasz indukcyjny dowód. ⊠

W tym dowodzie wykorzystaliśmy następujący lemat.

7.1.3. *Dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych r, m zachodzi równość*

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{m}{r} = \binom{m+1}{r+1}.$$

D. Ponieważ $\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}$ (dla dowolnych $n \in \mathbb{N}_0$), więc

$$\begin{aligned} \tbinom{r}{r} + \tbinom{r+1}{r} + \cdots + \tbinom{m}{r} &= \tbinom{r+1}{r+1} - \tbinom{r}{r+1} + \tbinom{r+2}{r+1} - \tbinom{r+1}{r+1} + \tbinom{r+3}{r+1} - \tbinom{r+2}{r+1} + \cdots + \tbinom{m+1}{r+1} - \tbinom{m}{r+1} \\ &= \tbinom{m+1}{r+1} - \tbinom{r}{r+1} \\ &= \tbinom{m+1}{r+1} \end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

7.1.4. *Liczby $a_k(n)$ dla pewnych n, k.*

$k\backslash n$	10	50	100	200	500	1000
2	9	49	99	199	499	999
3	36	1176	4851	19701	124251	498501
4	84	18424	156849	1293699	20584249	165668499
5	126	211876	3764376	63391251	2552446876	41251456251
6	126	1906884	71523144	2472258789	252692240724	8209039793949
7	84	13983816	1120529256	79936367511	20804994486276	1359964259197551

Z tablicy tej odczytujemy, że na przykład liczba 500 ma dokładnie 20 804 994 486 276 różnych przedstawień w postaci sumy siedmiu liczb naturalnych (przy założeniu, że przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników są różne).

Liczba 3 rozkłada się czterema różnymi sposobami na sumę liczb naturalnych:

$$3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1.$$

Liczba 4 rozkłada się ośmioma różnymi sposobami na sumę liczb naturalnych:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 3 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

W ogólnym przypadku można udowodnić:

7.1.5. *Liczba wszystkich rozkładów liczby naturalnej n na sumę liczb naturalnych, przy założeniu, że rozkłady różniące się porządkiem składników są różne, jest równa 2^{n-1}.* ([S50] 528).

D. Rozpatrywana liczba rozkładów liczby n jest sumą liczb $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_n(n)$. Korzystamy ze stwierdzenia 7.1.2:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

i to kończy dowód. ⊠

7.1.6. *Niech $a(n)$ będzie liczbą wszystkich możliwych przedstawień liczby n w postaci sumy jedynek i dwójek, przy czym przedstawienia różniące się porządkiem uważamy za różne. Np.:*

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2,$$

czyli $a(4) = 5$. Niech $b(n)$ będzie liczbą wszystkich możliwych przedstawień liczby n w postaci sumy liczb naturalnych większych od 1, przy czym przedstawienia różniące się porządkiem uważamy za różne. Np.:

$$6 = 4 + 2 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2 = 6,$$

czyli $b(6) = 5$. Wówczas dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $a(n) = b(n + 2)$. ([Putn] 1957).

D. ([G-gk]). Spójrzmy na początkowe przykłady: $a(1) = 1$, $a(2) = 2$, $a(3) = 3$, $a(4) = 5$, $a(5) = 8$, $a(6) = 13$; $b(1) = 0$, $b(2) = 1$, $b(3) = 1$, $b(4) = 2$, $b(5) = 3$, $b(5) = 5$. Zauważmy, że

$$a(n+1) = a(n) + a(n-1).$$

Jeśli bowiem przedstawienie liczby $n+1$ rozpoczyna się od jedynki, to mamy $a(n)$ takich przedstawień. Jeśli rozpoczyna się od dwójki, to takich przedstawień jest $a(n-1)$.

Usuńmy ostatni składnik w przedstawieniu liczby $n+1$ w postaci sumy liczb naturalnych większych od 1. Otrzymamy wówczas:

$$b(n+1) = b(n-1) + b(n-2) + \cdots + b(2) + 1$$

i podobnie, gdy $n \geqslant 2$, $b(n) = b(n-2) + \cdots + b(2) + 1$. Stąd wynika, że $b(n+1) = b(n) + b(n-1)$. Ponieważ $b(3) = a(1)$ i $b(4) = a(2)$, więc teza wynika łatwo na mocy indukcji. ⊠

Załóżmy teraz, że w rozkładach na sumy mogą również występować składniki zerowe. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $b_k(n)$ liczbę wszystkich ciągów o $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ takich, że $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ oraz $x_1, \ldots, x_n$ należą do zbioru $\mathbb{N}_0$, czyli są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Jest jasne, że $b_1(n) = 1$. Łatwo zauważyć, że

$$b_2(n) = n + 1,$$

gdyż wszystkimi rozkładami liczby $n > 1$ na sumę dwóch nieujemnych liczb całkowitych są:

$$0 + n, \quad 1 + (n-1), \quad 2 + (n-2), \quad \ldots, \quad (n-1) + 1, \quad n + 0.$$

Dla $k = 3$ oraz $n = 4$ mamy:

$$\begin{aligned} 4 &= 0+0+4 = 0+1+3 = 0+2+2 = 0+3+1 = 0+4+0 \\ &= 1+0+3 = 1+1+2 = 1+2+1 = 1+3+0 \\ &= 2+0+2 = 2+1+1 = 2+2+0 \\ &= 3+0+1 = 3+1+0 \\ &= 4+0+0. \end{aligned}$$

Jest 15 rozkładów, a zatem $b_3(4) = 15$.

7.1.7. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$b_3(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

D. Pierwszym składnikiem w rozkładzie liczby n na sumę trzech liczb naturalnych może być dowolna nieujemna liczba całkowita s mniejsza lub równa n. Dla danej takiej liczby s należy tylko przedstawić liczbę $n - s$ jako sumę dwóch nieujemnych liczb całkowitych, a takich rozkładów jest $b_2(n-s)$, czyli $n - s + 1$. Mamy więc:

$$b_3(n) = a_2(n) + b_2(n-1) + \cdots + b_2(0) = (n+1) + n + \cdots + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

czyli $b_3(n) = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$. ⊠

7.1.8. *Dla dowolnych liczb naturalnych k, n zachodzi równość*

$$b_k(n) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Innymi słowy, daną liczbę naturalną n można przedstawić w postaci sumy k nieujemnych liczb całkowitych na dokładnie $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów (przy założeniu, że przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników są różne). ([S59] 431, [Dlt] 9/1975).

D. Indukcja ze względu na k. Już wiemy, że tak jest dla $k = 1$ i dowolnego n. Niech $k \geqslant 1$ i załóżmy, że

$$b_k(n) = \binom{n+k-1}{k-1}, \quad \text{dla wszystkich} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozpatrzmy rozkłady danej liczby naturalnej n skaładające się z $k+1$ składników. Pierwszym składnikiem w rozkładzie może być dowolna nieujemna liczba całkowita s mniejsza lub równa n. Dla danej takiej liczby naturalnej s należy tylko przedstawić liczbę $n - s$ jako sumę k nieujemnych liczb całkowitych, a takich rozkładów jest $b_k(n-s)$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} b_{k+1}(n) &= b_k(n) \quad b_k(n-1) + b_k(n-2) + \cdots + b_k(0) \\ &= \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \\ &= \binom{n+k}{k}, \end{aligned}$$

(wykorzystaliśmy lemat 7.1.3) tzn. $a_{k+1}(n) = \binom{n+(k+1)-1}{(k+1)-1}$ i to kończy indukcyjny dowód. ⊠

7.1.9. *Liczby $b_k(n)$ dla pewnych n, k.*

$k \backslash n$	10	50	100	200	500	1000
2	11	51	101	201	501	1001
3	66	1326	5151	20301	125751	501501
4	286	23426	176851	1373701	21084251	167668501
5	1001	316251	4598126	70058751	2656615626	42084793751
6	3003	3478761	96560646	2872408791	268318178226	8459043543951
7	8008	32468436	1705904746	98619368491	22628166363726	1418299634202451

Z tablicy tej odczytujemy, że na przykład liczba 500 ma dokładnie 22 628 166 363 726 różnych przedstawień w postaci sumy siedmiu nieujemnych liczb całkowitych (przy założeniu, że przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników są różne).

Spójrzmy na jednomiany:

$$x^4,\ x^3y,\ x^3z,\ x^2y^2,\ x^2yz,\ x^2z^2,\ xy^3,\ xy^2z,\ xyz^2,\ xz^3,\ y^4,\ y^3z,\ y^2z^2,\ yz^3,\ z^4.$$

Są to wszystkie moniczne jednomiany stopnia 4, przemiennych zmiennych x, y, z. Jest ich 15. Z równości podanej w 7.1.8 wynika znane stwierdzenie dotyczące liczby takich jednomianów.

7.1.10. *Wszystkich monicznych jednomianów stopnia d, przemiennych zmiennych $x_1, \dots, x_n$, jest dokładnie*

$$b_n(d) = \binom{n+d-1}{n-1}.$$

★ W. Sierpiński, *Niektóre zagadnienia addytywnej teorii liczb*, [S57], 12-16.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2 Uporządkowane sumy ustalonej długości

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech k będzie liczbą naturalną.

W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się liczbą przedstawień danej liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych. Zakładaliśmy przy tym, że przedstawienia różniące się kolejnością występowania składników są różne. Teraz to założenie pominiemy. Przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników będziemy traktować jako identyczne. Liczbę wszystkich takich przedstawień oznaczać będziemy przez $p(n,k)$. Zatem, $p(n,k)$ jest liczbą wszystkich ciągów o wyrazach naturalnych $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ takich, że

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad \text{oraz} \quad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_1.$$

Wyrazy ciągów $(x_1, \dots, x_n)$ są ustawione w sposób nierosnący. Tak to się zwykle przyjmuje (patrz na przykład: [HW4], [ErV]). Przykłady:

$$\begin{aligned} 7 &= 5+1+1, & 9 &= 8+1,\\ &= 4+2+1, & &= 7+2,\\ &= 3+3+1, & &= 6+5,\\ &= 3+2+2, & &= 5+4, \end{aligned}$$

Mamy więc: $p(7,3) = 4$, $p(9,2) = 4$. Przyjmujemy dodatkowo, że $p(n,0) = 0$. Jest oczywiste, że $p(n,1) = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz, że $p(n,k) = 0$ dla $n < k$. Łatwo ponadto wykazać:

7.2.1. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$p(n,2) = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Innymi słowy, jeśli n jest parzyste, to istnieje dokładnie $\frac{n}{2}$ przedstawień liczby n w postaci sumy dwóch liczb naturalnych, a jeśli n jest nieparzyste, to takich przedstawień jest dokładnie $\frac{n-1}{2}$ (przy założeniu, że przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników są identyczne).

7.2.2. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$p(n,3) = \left[\frac{n^2+6}{12}\right]. \quad \text{([S50] 502).}$$

Trudniej jest podać podobne wzory dla liczb $p(n,4)$, $p(n,5)$ lub ogólniej dla liczb $p(n,k)$ gdzie $k \geqslant 4$.

7.2.3. *Jeśli $n \geqslant 2$ oraz $1 \leqslant k \leqslant n$, to*

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k).$$

D. Załóżmy, że $(x_1, \dots, x_k)$ jest nierosnącym ciągiem liczb naturalnych takim, że $x_1 + \cdots + x_k = n$ i spójrzmy na ostatni wyraz x_k. Możliwe są tylko dwa następujące przypadki.

Przypadek 1. Założmy, że $x_k = 1$. W tym przypadku $(x_1, \dots, x_{k-1})$ jest nierosnącym ciągiem z sumą równą $n-1$. Wszystkich rozważanych ciągów $(x_1, \dots, x_k)$, spełniających ten dodatkowy warunek, jest oczywiśćie $p(n-1, k-1)$.

Przypadek 2. Załóżmy, że $x_k \geqslant 2$. Odejmując od wszystkich wyrazów $x_1, \dots, x_k$ liczbę 1, otrzymujemy nierosnący ciąg liczb naturalnych

$$(x_1 - 1, \ x_2 - 1, \ \dots, \ x_k - 1)$$

z sumą równą $n-k$. Wszystkich rozważanych ciągów $(x_1, \dots, x_k)$, spełniających warunek $x_k \geqslant 2$, jest więc dokładnie $p(n-k, k)$. To kończy dowód. ⊠

7.2.4. *Dla dowolnych liczb naturalnych $n \geqslant k$ zachodzi równość*

$$p(n,k) = \sum_{j=1}^{k} p(n-k, j). \quad \text{([ErV] 200).}$$

D. Indukcja matematyczna ze względu na k. Dla $k = 1$ mamy:

$$\sum_{j=1}^{1} p(n-1, j) = p(n-1, 1) = 1 = p(n, 1).$$

Niech $k \geqslant 1$ i załóżmy, że dla wszystkich n, większych lub równych k, rozpatrywana równość zachodzi. Wtedy dla $n \geqslant k+1$ mamy:

$$p(n, k+1) = p(n-1, k) + p(n-(k+1), k+1) = \sum_{j=1}^{k} p(n-1-k, j) = \sum_{j=1}^{k+1} p(n-(k+1), j).$$

Wykorzystaliśmy 7.2.3 oraz założenie indukcyjne. ⊠

7.2.5 (Maple).*Przykłady.*

$p(100,3) = 833$,	$p(200,3) = 3333$,	$p(300,3) = 7500$,	$p(400,3) = 13333$,
$p(500,3) = 20833$,	$p(600,3) = 30000$,	$p(700,3) = 40833$,	$p(800,3) = 53333$,
$p(900,3) = 67500$,	$p(1000,3) = 83333$,	$p(1100,3) = 100833$,	$p(1200,3) = 120000$,
$p(100,4) = 7153$,	$p(200,4) = 56389$,	$p(300,4) = 189375$,	$p(400,4) = 447778$,
$p(500,4) = 873264$,	$p(600,4) = 1507500$,	$p(700,4) = 2392153$,	$p(800,4) = 3568889$,
$p(900,4) = 5079375$,	$p(1000,4) = 6965278$,	$p(1100,4) = 9268264$,	$p(1200,4) = 12030000$,
$p(100,5) = 38225$,	$p(200,5) = 583464$,	$p(300,5) = 2906550$,	$p(400,5) = 9111650$,
$p(500,5) = 22136264$,	$p(600,5) = 45751225$,	$p(700,5) = 84560700$,	$p(800,5) = 144002189$,
$p(900,5) = 230346525$,	$p(1000,5) = 350697875$,	$p(1100,5) = 512993739$,	$p(1200,5) = 726004950$.

7.2.6. *Niech $c(n)$ będzie liczbą wszystkich możliwych przedstawień liczby n w postaci sumy trzech różnych liczb naturalnych, nie uwzględniając kolejności występowania składników. Np.:*

$$10 = 7 + 2 + 1 = 6 + 3 + 1 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2,$$

czyli $c(10) = 4$. Mamy wtedy:

(1) *jeśli $6 \mid n$, to $c(n)$ jest liczbą nieparzystą;*

(2) *jeśli $n \equiv \pm 2 \pmod 6$, to $c(n)$ jest liczbą parzystą.* ([IMO] Longlist 1979).

★ M. Erickson, A. Vazzana, *Partitions of an integer*, [ErV], 186-203.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3 Partycje i liczby p(n)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Partycją liczby naturalnej n nazywamy każdy rozkład liczby n na sumę nierosnących liczb naturalnych. Dla przykładu liczba 5 ma 7 partycji:

$$\begin{aligned} 5 &= 5, \\ &= 4+1, \\ &= 3+2, \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1, \\ &= 2+1+1+1, \\ &= 1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Liczbę wszystkich partycji liczby n oznaczać będziemy przez $p(n)$. Mamy więc: $p(5) = 7$.

7.3.1 (Maple)**.** *Liczby* $p(n)$ *dla* $1 \leqslant n \leqslant 120$.

1	1	21	792	41	44583	61	1121505	81	18004327	101	214481126
2	2	22	1002	42	53174	62	1300156	82	20506255	102	241265379
3	3	23	1255	43	63261	63	1505499	83	23338469	103	271248950
4	5	24	1575	44	75175	64	1741630	84	26543660	104	304801365
5	7	25	1958	45	89134	65	2012558	85	30167357	105	342325709
6	11	26	2436	46	105558	66	2323520	86	34262962	106	384276336
7	15	27	3010	47	124754	67	2679689	87	38887673	107	431149389
8	22	28	3718	48	147273	68	3087735	88	44108109	108	483502844
9	30	29	4565	49	173525	69	3554345	89	49995925	109	541946240
10	42	30	5604	50	204226	70	4087968	90	56634173	110	607163746
11	56	31	6842	51	239943	71	4697205	91	64112359	111	679903203
12	77	32	8349	52	281589	72	5392783	92	72533807	112	761002156
13	101	33	10143	53	329931	73	6185689	93	82010177	113	851376628
14	135	34	12310	54	386155	74	7089500	94	92669720	114	952050665
15	176	35	14883	55	451276	75	8118264	95	104651419	115	1064144451
16	231	36	17977	56	526823	76	9289091	96	118114304	116	1188908248
17	297	37	21637	57	614154	77	10619863	97	133230930	117	1327710076
18	385	38	26015	58	715220	78	12132164	98	150198136	118	1482074143
19	490	39	31185	59	831820	79	13848650	99	169229875	119	1653668665
20	627	40	37338	60	966467	80	15796476	100	190569292	120	1844349560

7.3.2 (Maple)**.** *Liczby* $p(100n)$ *dla* $1 \leqslant n \leqslant 5$*, wraz z ich rozkładami kanonicznymi.*

$$\begin{aligned} p(100) &= 190569292 &&= 2^2 \cdot 43 \cdot 59 \cdot 89 \cdot 211, \\ p(200) &= 3972999029388 &&= 2^2 \cdot 3 \cdot 331083252449, \\ p(300) &= 9253082936723602 &&= 2 \cdot 137 \cdot 1021 \cdot 33075784213, \\ p(400) &= 6727090051741041926 &&= 2 \cdot 23869 \cdot 140916880718527, \\ p(500) &= 2300165032574323995027 &&= 3 \cdot 601 \cdot 39979 \cdot 31910333520971. \end{aligned}$$

7.3.3 (Maple)**.** *Liczby* $p(100n)$ *dla* $6 \leqslant n \leqslant 12.$

$$\begin{array}{rcr} p(600) & = & 4580047880081443085536 22, \\ p(700) & = & 60378285202834474611028659, \\ p(800) & = & 5733052172321422504456911979, \\ p(900) & = & 415873681190459054784114365430, \\ p(1000) & = & 24061467864032622473692149727991, \\ p(1100) & = & 1147240591519695580043346988281283, \\ p(1200) & = & 46240102378152881298913555099661657. \end{array}$$

Ustalmy terminologię i wprowadźmy pewne oznaczenia.

Załóżmy, że $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ jest partycją liczby naturalnej n. Mamy wtedy r liczb naturalnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ takich, że $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_r \geqslant 1$ oraz $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$. Liczbę r będziemy w tym przypadku nazywać *długością* tej partycji. Natomiast liczby naturalne $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ nazywać będziemy *wyrazami* tej partycji. Powyższą partycję będziemy również oznaczać w postaci skończonego ciągu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Czasami w tym ciągowym zapisie opuszczać będziemy nawiasy i przecinki. Dotyczyć to będzie głównie partycji o małych wyrazach. Dla przykładu partycję $(5, 4, 2, 2, 1, 1, 1)$, liczby 16, oznaczać będziemy przez 5422111.

7.3.4. *Wszystkie partycje liczby* 8 (*jest ich* 22) :

8,	53,	44,	332,	2222,
71,	521,	431,	3311,	22211,
62,	5111,	422,	3221,	221111,
611,		4211,	32111,	2111111,
		41111,	311111,	11111111.

7.3.5. *Wszystkie partycje liczby* 9 (*jest ich* 30) :

9,	63,	54,	441,	333,	22221,
81,	621,	531,	432,	3321,	222111,
72,	6111,	522,	4311,	33111,	2211111,
711,		5211,	4221,	3222,	21111111,
		51111,	42111,	32211,	111111111.
			411111,	321111,	
				3111111,	

Spójrzmy na powyższe partycje liczby 9. Mamy tu 4 partycje długości 2. Są to: $81, 72, 63$ oraz 54. Tyle samo jest partycji, w których liczba 2 jest największym wyrazem: 22221, 222111, 2211111 oraz 21111111. Widzimy 6 partycji o największym wyrazie równym 4 :

441, 432, 4311, 4221, 42111, 411111.

Tyle samo (też 6) jest partycji długości 4:

6111, 5211, 4311, 4221, 3321, 3222.

Podobna sytuacja zachodzi dla partycji liczby 8. W następnym podrozdziale (patrz twierdzenie 7.5.2) wykażemy że to nie jest przypadek, że taką własność posiadają partycje dowolnej liczby naturalnej. Inne interesujące własności zbioru wszystkich partycji danej liczby n można również zauważyć obserwując powyższe partycje liczb 8 i 9.

Przypomnijmy (patrz poprzedni podrozdział), że przez $p(n,k)$ oznaczamy liczbę wszystkich przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych (przy założeniu, że przedstawienia różniące się tylko kolejnością występowania składników są identyczne). Każde takie k-składnikowe przedstawienie jest oczywiście partycją liczby n długości k. Mamy zatem:

7.3.6. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k).$$

7.3.7. *Dla ustalonej liczby naturalnej n rozpatrzmy równanie*

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n.$$

Równanie to posiada dokładnie $p(n)$ rozwiązań w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych.

D. Niech $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ będzie dowolną partycją liczby n. Mamy wtedy liczby naturalne $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k$, których suma jest równa n. Wszystkie te liczby należą do zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Oznaczmy przez x_j, dla $j = 1,2,\ldots,n$, liczbę tych liczb spośród $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, które są dokładnie równe j. Otrzymane liczby $x_1,\ldots,x_n$ są całkowite, nieujemne i ponadto suma $1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$ jest równa liczbie $\alpha_1+\cdots+\alpha_k$, czyli jest równa n. Ciąg $(x_1,\ldots,x_n)$ jest więc rozwiązaniem rozpatrywanego równania w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych.

Każdej partycji liczby n można w ten sposób przyporządkować dokładnie jedno rozwiązanie. Zauważmy, że przyporządkowanie to jest bijekcją. Przyporządkowanie odwrotne określone jest w następujący sposób. Niech $(x_1,\ldots,x_n)$ będzie dowolnym rozwiązaniem rozpatrywanego równania w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych. Mamy wtedy nierosnący ciąg

$$\underbrace{n,n,\ldots,n}_{x_n},\underbrace{n-1,n-1,\ldots,n-1}_{x_{n-1}},\ldots,\underbrace{2,2,\ldots,2}_{x_2},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{x_1},$$

liczb naturalnych z sumą równą n. Mamy więc jednoznacznie wyznaczoną taką partycję liczby n, dla której przyporządkowane w powyższy sposób rozwiązanie jest ciągiem $(x_1,\ldots,x_n)$. Rozpatrywane równanie ma więc dokładnie tyle rozwiązań w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych ile jest partycji liczby n, czyli $p(n)$. ⊠

W podobny sposób wykazujemy następne stwierdzenie.

7.3.8. *Dla ustalonych liczb naturalnych $n \geqslant k$ rozpatrzmy równanie*

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k = n.$$

Równanie to posiada dokładnie tyle rozwiązań w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych ile jest takich partycji liczby n, których wszystkie wyrazy są mniejsze lub równe k.

Łatwo się wykazuje, że

7.3.9. $p(n+2) \leqslant p(n+1) + p(n)$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([An-E] 19-22).

Stąd (stosując prostą indukcję) otrzymujemy następujące górne oszacowanie liczby $p(n)$ za pomocą liczb Fibonacciego. Przypomnijmy, że

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

7.3.10. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność*

$$p(n) \leqslant u_{n+1}. \quad \text{([An-E] 22).}$$

7.3.11. *Dla danej liczby naturalnej n niech a_n oznacza sumę liczb różnych wyrazów w każdej partycji liczby n. Dla przykładu, $a_4 = 7$ gdyż liczba naturalna 4 ma dokładnie 5 partycji: 4, 31, 22, 211 i 1111. Liczby różnych składników w każdej z tych partycji są odpowiednio równe $1, 2, 1, 2, 1$. Zatem, $a_4 = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$. Zachodzą następujące własności.*

(1) $a_n = 1 + p(1) + p(2) + \cdots + p(n-1)$.

(2) $a_n \leqslant p(n)\sqrt{2n}$. ([TT] Spring 1984).

★ L. E. Dickson, *Partitions*, [Dic2] 101-164.
H. Griffin, *Partitions*, [Grif] 190-195.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *Partitions*, [HW4], 273-296.
P. Shiu, *Computations of the partition function*, [MG] 490(1997) 45-52.
J. J. Tattersall, *Partitions*, [Tatt] 304-325.
F. W. Wainsztein, *O partycjach*, [Kw] 11-12/1988 19-25.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4 Partycje, granice i szeregi generujące

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$. ([An-E] 61, [Mol2] 56).

7.4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(n+1)}{p(n)} = 1$. ([Mol2] 56).

7.4.3 (Euler)**.** *Dla wszystkich liczb rzeczywistych x z przedziału $(-1, 1)$ zachodzą następujące równości:*

(1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n,$

(2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^n,$

(3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n,$

gdzie $c(n)$ jest liczbą tych partycji liczby n, których wyrazy są parami różne; natomiast $d(n)$ jest liczbą tych partycji liczby n, których wszystkie wyrazy są liczbami nieparzystymi.

([HW4], [An-E] 47-48, [S50] 527- 528, [Mol2] 56-58 [ErV] 190).

Powyższe równości mają sens w pierścieniu szeregów formalnych jednej zmiennej (na przykład nad ciałem liczb wymiernych). Podstawowe definicje i fakty dotyczące szeregów formalnych znajdziemy w ostatnim rozdziale drugiego wydania książki [N-5]. Udowodnimy równość (1).

Zauważmy, najpierw że

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \left(x^k\right)^j.$$

Po lewej stronie równości (1) występuje więc nieskończony iloczyn formalnych szeregów

$$\Big(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\Big)\Big(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots\Big)\Big(1 + x^3 + x^6 + x^9 \dots\Big)\cdots.$$

Ten nieskończony iloczyn jest szeregiem formalnym postaci $1 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$, gdzie $b_1, b_2, \cdots$ są pewnymi liczbami całkowitymi (a nawet naturalnymi). Każdy współczynnik b_n jest liczbą wszystkich rozwiązań $(x_1, \dots, x_n)$ równania

$$1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n$$

w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych. Udowodniliśmy (patrz twierdzenie 7.3.7), ze tych rozwiązań jest dokładnie $p(n)$. Zatem $b_n = p(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. W ten sposób otrzymujemy równość (1). Podobnie wykazuje się równości (2) oraz (3).

Łatwo również można udowodnić następne dwie równości.

7.4.4. ([ErV] 191-192).

(1) $$x^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j} = \sum_{n=k}^{\infty} p(n,k)x^n,$$

(2) $$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j} = \sum_{n=k}^{\infty} p(n, \leqslant k)x^n,$$

gdzie - tak jak poprzednio - $p(n,k)$ jest liczbą wszystkich partycji liczby n długości k. Natomiast $p(n, \leqslant k)$ jest liczbą wszystkich partycji liczby n długości $\leqslant k$.

★

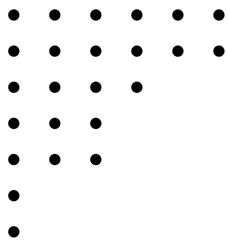
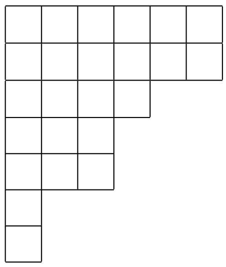
G. E. Andrews, *Infinite series generating functions*, [Ands], 16-32.
G. E. Andrews, K. Eriksson, *Generating functions*, [An-E] 42-54.
W. A. Coppel, *Partitions*, [Copp], 544-549.
M. Erickson, A. Vazzana, *Partitions of an integer*, [ErV], 186-203.
R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Funkcje tworzące*, [G-kp], 356-422.
N. MacKinnon, *Partitions and the dancing bear*, [MG] 74(468)(1990) 127-129.
R. A. Mollin, *Partitions and generating functions*, [Mol2] 55-59.
I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *Formal power series generating functions, and Euler's identity*, [NiZM], 452-457.
S. M. Woronin, A. G. Kułagin, *O partycjach, szeregach formalnych, ...*, [Kw] 5/1984 11-15, 52.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5 Grafy Ferrersa i operacja sprzężenia

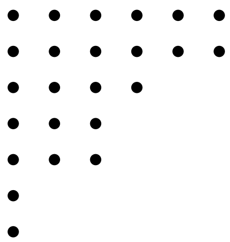
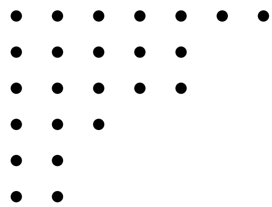
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Partycje przedstawia się często również w sposób graficzny. Dla przykładu poniższe rysunki przestawiają partycję $\alpha = (6, 6, 4, 3, 3, 1, 1)$, liczby 24.

Rysunek po lewej stronie jest nazywany *grafem Ferrersa* [1] ([Ands], [HW4], [An-E]). Natomiast rysunek po prawej stronie jest nazywany *diagramem Younga* ([An-E]). W książkach i artykułach dotyczących partycji częściej występują grafy Ferrersa, a o diagramach Younga się tylko wspomina.

Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ będzie partycją danej liczby n. Graf Ferrersa tej partycji ma dokładnie r wierszy i α_1 kolumn. Kolejne wiersze mają odpowiednio $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ czarnych kropek. Zróbmy transpozycję tego grafu, tzn. zamieńmy wiersze na kolumny, a kolumny na wiersze. Otrzymamy wtedy graf Ferrersa pewnej nowej partycji tej samej liczby n. Tę nową partycję oznaczać będziemy przez α^* i nazywać *sprzężeniem* partycji α. Dla przykładu rozpatrzmy, tę samą co poprzednio, partycję $\alpha = (6, 6, 4, 3, 3, 1, 1)$ liczby 24.

Zamieniliśmy wiersze na kolumny, a kolumny na wiersze. Liczba wszystkich czarnych kropek nie uległa zmianie. Po lewej stronie mamy graf Ferrersa partycji $\alpha = (6, 6, 4, 3, 3, 1, 1)$, a po prawej stronie graf Ferrersa partycji sprzeżonej $\alpha^* = (7, 5, 5, 3, 2, 2)$. Mamy teraz dwie partycje liczby 24. Liczby 6 i 7 zamieniły się rolami. Partycja α ma długość równą 7 i jej najwieększym wyrazem jest 6. W partycji α^* liczba 7 jest największym wyrazem, a liczba 6 jest jej długością.

Jest jasne, że jeśli dokonamy operacji sprzężenia na partycji α^*, to otrzymamy wyjściową partycję α. Sprzężenie ma więc następującą własność.

7.5.1. *Dla każdej partycji α zachodzi równość*

$$\alpha^{**} = \alpha.$$

[1] Norman Ferrers (1829-1903).

Ta oczywista własność mówi nam, że (dla dowolnych liczb naturalnych n, k) operacja sprzężenia jest bijekcją pomiędzy zbiorem wszystkich partycji liczby n o długości k i zbiorem wszystkich takich partycji liczby n, których największy wyraz jest równy k. Przypomnijmy, że liczbę wszystkich partycji liczby n o długości k oznaczamy przez $p(n,k)$. Udowodniliśmy zatem:

7.5.2. *Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Wszystkich partycji liczby n o największym wyrazie równym k jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n o długości k; czyli jest ich $p(n,k)$.* ([HW4] 274, [Ands] 8, [Ald], [An-E]).

Stąd dalej wynika:

7.5.3. *Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Wszystkich partycji liczby n o największym wyrazie mniejszym niż k jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n o długości mniejszej od k.* ([HW4] 274).

Zanotujmy kilka przykładów partycji i ich sprzężeń.

7.5.4.
$$\begin{aligned}
(7,7,3)^* &= (3,3,3,2,2,2,2),\\
(7,6,4)^* &= (3,3,3,3,2,2,1),\\
(7,4,3,3)^* &= (4,4,4,2,1,1,1),\\
(7,5,3,2)^* &= (4,4,3,2,2,1,1),\\
(7,4,3,2,1)^* &= (5,4,3,2,1,1,1).
\end{aligned}$$

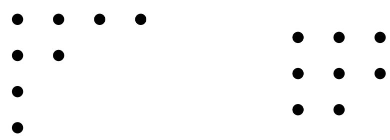
Sprzężenie zdefiniowaliśmy za pomocą grafu Ferrersa. Inne równoważne definicje sprzężenia otrzymamy z następujących stwierdzeń.

7.5.5. *Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie partycją liczby n. Oznaczmy przez s wyraz α_1 i niech β_j, dla $j = 1, 2, \dots, s$, będzie liczbą tych wszystkich wyrazów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, które są większe lub równe j. Wtedy $\alpha^* = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.*

7.5.6. *Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie partycją liczby n. Oznaczmy przez s wyraz α_1 i niech a_j, dla $j = 1, 2, \dots, s$, będzie liczbą tych wszystkich wyrazów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, które są równe j. Oznaczmy ponadto:*
$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_s,\\
\gamma_2 &= a_2 + a_3 + \cdots + a_s,\\
\gamma_3 &= a_3 + \cdots + a_s,\\
&\vdots\\
\gamma_s &= a_s.
\end{aligned}$$
Wtedy $\alpha^* = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$.

7.5.7. *Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie partycją liczby n. Wtedy:*
$$\alpha^* = \Big(\underbrace{k, \dots, k}_{\alpha_k},\ \underbrace{(k-1), \dots, (k-1)}_{\alpha_{k-1}-\alpha_k},\ \underbrace{(k-2), \dots, (k-2)}_{\alpha_{k-2}-\alpha_{k-1}}, \dots,\ \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2-\alpha_3},\ \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1-\alpha_2} \Big).$$

Istnieją takie partycje α, dla których zachodzi równość $\alpha^* = \alpha$. Mówić będziemy, że są to partycje *samosprzężone*. Wśród wszystkich partycji liczby 8 (patrz 7.3.4) dwie są samosprzężone: 4211 oraz 332;



W zbiorze wszystkich partycji liczby 8 istnieją również dwie takie, których wszystkie wyrazy są nieparzyste i parami różne. Są to partycje 71 oraz 53.

7.5.8. *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wszystkich samosprzężonych partycji liczby n jest dokładnie tyle ile jest partycji liczby n o wszystkich wyrazach nieparzystych i parami różnych.* ([HW4] 279, [An-E] 18).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.6 Liczby partycji szczególnej postaci

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Udowodniliśmy (patrz twierdzenie 7.5.2), wszystkich partycji liczby n o największym wyrazie równym k jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n o długośći k. Podobnego typu są twierdzenia 7.5.3 oraz 7.5.8. Tego rodzaju różnych twierdzeń istnieje bardzo dużo. Spójrzmy jeszcze raz na wszystkie partycje liczby 9 podane w 7.3.5. Wśród tych partycji istnieje 8 takich, których wszystkie wyrazy są liczbami nieparzystymi:

$$9,\ 711, 531,\ 51111,\ 333,\ 33111,\ 3111111,\ 111111111.$$

Znajdziemy również 8 takich partycji, których wyrazy są parami różne:

$$9,\ 81,\ 72,\ 63,\ 621,\ 54,\ 531,\ 432.$$

To nie jest przypadek. Można udowodnić:

7.6.1 (Euler 1748)**.** *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wszystkich partycji liczby n o nieparzystych wyrazach jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n z parami różnymi wyrazami.* ([HW4] 277, [Ald], [An-E], [Mol2] 58).

D. ([ErV] 193). Przedstawimy dowód wykorzystujący równości szeregów formalnych podane w twierdzeniu 7.4.3. Przez $c(n)$ oznaczamy liczbę tych partycji liczby n, których wyrazy są parami różne; natomiast $d(n)$ jest liczbą tych partycji liczby n, których wszystkie wyrazy są liczbami nieparzystymi. Dodatkowo przyjmujemy, że $c(0) = d(0) = 1$. Należy wykazać, że $c(n) = d(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} \\
&= \frac{(1-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} \cdot \frac{(1-x^4)}{(1-x^3)(1-x^4)} \cdot \frac{(1-x^6)}{(1-x^5)(1-x^6)} \cdots \\
&= \frac{(1-x^2)}{(1-x)} \cdot \frac{(1-x^4)}{(1-x^2)} \cdot \frac{(1-x^6)}{(1-x^3)} \cdots = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n
\end{aligned}$$

i stąd $d(n) = c(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ⊠

Wśród partycji liczby 9 istnieje dokładnie 5 takich, których wszystkie wyrazy przystają do 1 lub 4 modulo 5 :

$$9,\ 51111,\ 441,\ 411111,\ 111111111.$$

Istnieje również 5 takich partycji liczby 9, których wszystkie różnice pomiędzy kolejnymi wyrazami są większe od 1 :

$$9,\ 81,\ 72,\ 63,\ 531$$

(zakładając, że partycja długości 1 też spełnia ten warunek). Własność ta zachodzi dla zbioru wszystkich partycji dowolnej liczby naturalnej. Udowodnił to w roku 1894 Leonard James Rogers oraz kilka lat później, w roku 1913, udowodnił to niezależnie Srinvasa Ramanujan.

7.6.2 (Rogers-Ramanujan)**.** *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wszystkich partycji liczby n o wyrazach przystających do 1 lub 4 modulo 5 jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n, których wszystkie różnice pomiędzy kolejnymi wyrazami są większe od 1 (zakładając, że partycja długości 1 też spełnia ten warunek).* ([HW4] 291, [Ald], [An-E]).

7.6.3 (Rogers-Ramanujan)**.** *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wszystkich partycji liczby n o wyrazach przystających do 2 lub 3 modulo 5 jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n, których wszystkie wyrazy są większe od 1 oraz różnice pomiędzy kolejnymi wyrazami są również większe od 1 (zakładając, że partycja długości 1, dla $n \geqslant 2$, też spełnia ten warunek).* ([HW4] 291, [Ald]).

Wśród partycji liczby 9 istnieją 4 takie, których wszystkie wyrazy przystają do $2, 3, 6, 9$ lub 10 modulo 12 :

$$9,\ 63,\ 333,\ 3222.$$

Istnieją również 4 takie partycje liczby 9, których wszystkie wyrazy występują dokładnie 2, 3 lub 5 razy:

$$333,\ 33111,\ 222111,\ 2211111.$$

W 1971 roku M. V. Subbarao udowodnił, że tak jest zawsze.

7.6.4 (M.V. Subbarao)**.** *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wszystkich partycji liczby n o wyrazach przystających do $2, 3, 6, 9$ lub 10 modulo 12 jest dokładnie tyle ile jest wszystkich partycji liczby n, których wszystkie wyrazy występują dokładnie 2, 3 lub 5 razy.*

7.6.5 (G.E. Andrews)**.** *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wszystkich partycji liczby n, w których powtarzać się mogą tylko wyrazy nieparzyste jest dokładnie tyle ile jest takich partycji liczby n, których wszystkie wyrazy się powtarzają co najwyżej trzy razy.* ([Ands] 13).

★ D. Fuks, *O partycjach, tożsamości Eulera,...*, [Kw] 8/1981 12-20.
J. M. Gandhi, *On numbers related to partitions of a number*, [Mon] 76(9)(1969) 1033-1036.
R. K. Guy, *Two theorems of partitions*, [MG] 42(340)(1958) 84-86.
I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *The partition function*, [NiZM], 446-471.
G-C. Rota, *The number of partitions of a set*, [Mon] 71(5)(1964) 498-504.
M. V. Subbarao, *On a partition theorem of MacMahon-Andrews*, [Pams], 27(1971), 449-450.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.7 Liczby p(n) i relacja podzielności

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Liczby $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(13) = 101$ są pierwsze.

7.7.1 (Maple)**.** *Następne liczby pierwsze postaci $p(n)$, dla $n < 1000$, wraz z liczbami cyfr.*

n	$p(n)$	c
36	17977	5
77	10619863	8
132	6620830889	10
157	80630964769	11
168	228204732751	12
186	1171432692373	13
188	1398341745571	13
212	10963707205259	14
216	15285151248481	14
302	10657331232548839	17
366	790738119649411319	18
417	18987964267331664557	20
440	74878248419470886233	20
491	1394313503224447816939	22
498	2058791472042884901563	22

n	$p(n)$	c
525	9035096690829005915201	22
546	27833079238879849385687	23
658	8121368081058512888507057	25
735	307417131305664218954016427	27
753	699659745096778286894322787	27
825	17126396715550358417594267021	29
841	34211871031752548278772284453	29
863	87674799670795146675673859587	29

Liczb pierwszych postaci $p(n)$, gdzie $n < 1000$, jest dokładnie 29. Dla $n < 10\,000$ takich liczb pierwszych jest 68. Największą z nich jest liczba

$$\begin{aligned} p(9998) \quad = \quad & 352583135393521079399063275831711322517296241190643014 \\ & 29161749554127817510844257916651009136109253133438537, \end{aligned}$$

mająca 107 cyfr. Nie znamy odpowiedzi na pytanie:

7.7.2. *Czy liczb pierwszych postaci $p(n)$ istnieje nieskończenie wiele ?*

W 1959 roku O. Kolberg udowodnił, że wśród liczb postaci $p(n)$ istnieje nieskończenie wiele liczb parzystych i nieskończenie wiele liczb nieparzystych. Udowodniono więcej:

7.7.3 (K. Ono 1996)**.** *Niech a, b będą dowolnymi liczbami naturalnymi.*

(1) *Wśród liczb $p(an + b)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, istnieje nieskończenie wiele liczb parzystych.*

(2) *Jeśli istnieje co najmniej jedna liczba nieparzysta postaci $p(an + b)$, to takich liczb nieparzystych istnieje nieskończenie wiele.*

Nie znamy odpowiedzi na następujące pytanie.

7.7.4. *Czy wśród liczb postaci $p(n)$ istnieje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 3 ?*

Wiemy natomiast, że istnieje nieskończenie wiele liczb $p(n)$ podzielnych przez 5. Tak samo jest dla liczb podzielnych przez 7, 11, 13, itd. W początkowych latach 20 wieku Srinvasa Ramanujan udowodził w serii prac następujące twierdzenie.

7.7.5 (Ramanujan)**.** *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzą kongruencje:*

(1) $p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$,

(2) $p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7}$,

(3) $p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$.

([HW4] 287-288, [An-E] 51-52, [Mon] 10(1997) 963-964, [Bern]).

Wszystkie więc liczby postaci $p(5n+4)$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$, są podzielne przez 5. Liczby postaci $p(7n+5)$ są podzielne przez 7, a liczby $p(11n+6)$ są podzielne przez 11. Ramanujan udowodnił również, że:

7.7.6. $25n+24 \equiv 0 \pmod{25}$ *oraz* $49n+47 \equiv 0 \pmod{49}$, *dla* $n \in \mathbb{N}_0$.

Istnieje podobnego typu kongruencja dla liczby pierwszej 13.

7.7.7 (Atkin 1968)**.** $p(11^3 \cdot 13n + 237) \equiv 0 \pmod{13}$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$.

W latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku Erdös sformułował hipotezę, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje co najmniej jedna liczba postaci $p(n)$ podzielna przez p. Dzisiaj wiemy, że hipoteza ta jest prawdziwa. W 2000 roku Ken Ono udowodnił nawet więcej:

7.7.8 (K. Ono 2000)**.** *Dla każdej liczby pierwszej $p \geqslant 5$ istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że $p(an+b) \equiv 0 \pmod{p}$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

Wynik ten uogólnił niedawno Scott Ahlgren:

7.7.9 (S. Ahlgren)**.** *Dla każdej liczby naturalnej m, względnie pierwszej z 6, istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$p(an+b) \equiv 0 \pmod{m}, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zanotujmy jeszcze dwa interesujęce fakty dotyczące partycji i relacji podzielności.

7.7.10 (R. Timman 1946)**.** *Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość*

$$np(n) = \sigma(n) + p(1)\sigma(n-1) + p(2)\sigma(n-2) + \cdots + p(n-1)\sigma(1),$$

gdzie $\sigma(m)$ oznacza sumę wszystkich naturalnych dzielników liczby m. ([S59] 432, [An-E] 61).

7.7.11. *Liczba wszystkich rozkładów liczby naturalnej $n \geqslant 3$ na sumę parami względnie pierwszych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Dla $n = 3$ mamy trzy takie rozkłady:* $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$. *Dla $n = 4$ mamy sześć takich rozkładów:* $4 = 3+1 = 1+3 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$. ([Mon] 6(2005) z.11161).

★ S. Ahlgren, K. Ono, *The arithmetic of partitions*, [Nams] 48(9) (2001) 978-984.

A. O. L. Atkin, *Proof of a conjecture of Ramanujan*, Glasgow J. Math., 7(1967), 14-32.

A. O. L. Atkin, *Multiplicative congruence properties and density problems for $p(n)$*, Proc. London Mat. Soc., 18(1968), 563-576.

J. L. Drost, *A shorter proof of the Ramanujan congruence modulo 5*, [Mon] 10/1997 963-964.

M. D. Hirschorn, *Another short proof of Ramanujan's mod 5 partition congruence, and more*, [Mon] 106(6)(1999) 580-583.

M. D. Hirschorn, *Ramanujan's "most beautiful identity"*, [Mon] 118(9)(2011) 839-845.

O. Kolberg, *Note on the parity of the partition function*, Math. Scand., 7(1959), 377-378.

K. Ono, *The partition function in arithm. progr.*, Mathematische Annalen, 312(1996), 251-260.

K. Ono, *Distribution of the partition function modulo m*, Annals of Math., 151(2000), 293-307.

8 Skończone ciągi i bezwzględna wartość

Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech $\mathbb{R}^n$ oznacza zbiór wszystkich n-wyrazowych ciągów utworzonych z liczb rzeczywistych, tzn.

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, \dots, x_n);\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

W tym rozdziale badać będziemy funkcję $D = D_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, określoną wzorem

$$D\Big((x_1, x_2, \dots, x_n)\Big) = \Big(|x_1 - x_2|,\ |x_2 - x_3|,\ \dots,\ |x_{n-1} - x_n|,\ |x_n - x_1|\Big),$$

dla wszystkich ciągów $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zajmować się będziemy głównie ciągami postaci

$$x,\ D(x),\ D^2(x),\ D^3(x),\ \dots\ ,$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i gdzie każde D^m oznacza m-krotne złożenie funkcji D.

Spójrzmy na następujący przykład. Niech $n = 4$ i niech $x = (5, 4, 2, 1)$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} x = D^0(x) &= (5, 4, 2, 1), \\ D^1(x) &= (1, 2, 1, 4), \\ D^2(x) &= (1, 1, 3, 3), \\ D^3(x) &= (0, 2, 0, 2), \\ D^4(x) &= (2, 2, 2, 2), \\ D^5(x) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

i dalej $D^m(x) = (0, 0, 0, 0)$ dla $m \geqslant 5$. W tym przypadku 5 jest najmniejszą liczbą naturalną m taką, że $D^m(x)$ jest ciągiem zerowym. Powiemy w tym przypadku, że $x = (5, 4, 2, 1)$ jest ciągiem *rangi* 5 i pisać będziemy: $L(x) = 5$.

Niech teraz $n = 3$ i $x = (1, 0, 0)$. W tym przypadku otrzymujemy nieskończony ciąg:

$$(1, 0, 0),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ \dots\ ,$$

który się nie stabilizuje; nie otrzymamy zerowego ciągu $(0, 0, 0)$. Powiemy w tym przypadku, że ciąg $x = (1, 0, 0)$ ma nieskończoną rangę.

Niech $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Jeśli istnieje takie m, że $D^m(x)$ jest ciągiem zerowym, to najmniejsze takie m oznaczać będziemy przez $L(x)$ i nazywać *rangą* ciągu x. Jeśli natomiast takie m nie istnieje, to mówić będziemy, że ciąg x ma *nieskończoną rangę* i fakt ten zapisywać będziemy jako $L(x) = \infty$. Ranga jest więc tutaj funkcją $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Które ciągi mają skończoną rangę? Czy dla każdej liczby naturalnej m istnieje ciąg o danej długości n, posiadający rangę równą m? Czy funkcja L, ograniczona do zbioru ciągów o skończonej randze, ma jakieś górne ograniczenie? Odpowiedzi na tego typu pytania znajdziemy w tym rozdziale.

Dla $n = 4$ omawiane tutaj zagadnienia są dosyć popularne i noszą nazwy "the four numbers problem" lub "the four numbers game". Niniejszy rozdział został opracowany na podstawie artykułów i prac: [SalS] (strony 1−45), [Fre48], [DuM], [Magy], [Mill], [Ull], [Webb], [Zve].

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.1 Początkowe informacje o funkcjach D i L

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $n \geqslant 2$ i $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

8.1.1. $L(x) = 0 \iff x = (0, 0, \dots, 0)$.

8.1.2. $L(x) = 1 \iff x = (a, a, \dots, a)$, *gdzie* $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

Niech $n = 4$ i niech $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Z definicji funkcji D łatwo wynika, że wszystkie następuję czwórki:

$$\begin{array}{llll} (x_1, x_2, x_3, x_4), & (x_2, x_3, x_4, x_1), & (x_3, x_4, x_1, x_2), & (x_4, x_1, x_2, x_1), \\ (x_4, x_3, x_2, x_1), & (x_3, x_2, x_1, x_4), & (x_2, x_1, x_4, x_3), & (x_1, x_4, x_3, x_2), \end{array}$$

posiadają tę samą rangę. Podobnie jest dla dowolnego $n \geqslant 2$.

8.1.3. *Niech* $n \geqslant 2$. *Niech* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *i* $BA : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *będą funkcjami określonymi wzorami*

$$A\left((x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = \left(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1\right),$$
$$A\left((x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = \left(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1\right),$$

dla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Wtedy, dla każdego* $x \in \mathbb{R}^n$, *zachodzą równości*

$$L(x) = L(A(x)) = L(B(x)).$$

Bardzo łatwo wykazuje się również następujący fakt.

8.1.4. *Niech* $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Wtedy*

$$L((x_1, x_2, \dots, x_n)) = L((ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b)),$$

dla wszystkich $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

8.1.5. *Niech* $n \geqslant 2$ *i niech* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$. *Istnieją wtedy takie nieujemne liczby całkowite* $a_1, \dots, a_n$, *że*

$$L\Big((x_1, x_2, \dots, x_n)\Big) = L\Big((a_1, a_2, \dots, a_n)\Big).$$

D. Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie wspólnym mianownikiem wszystkich liczb wymiernych $x_1, \dots, x_n$. Wtedy liczby $mx_1, \dots, mx_n$ są całkowite. Niech u będzie najmniejszą z liczb $mx_1, \dots, mx_n$ i przyjmijmy

$$a_1 = mx_1 + |u|, \quad a_2 = mx_2 + |u|, \quad \dots, \quad a_n = mx_n + |u|.$$

Wtedy $a_1, \dots, a_n$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi i $L((x_1, \dots, x_n)) = L((a_1, \dots, a_n))$ (na mocy 8.1.4). ⊠

8.1.6. *Niech* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Wtedy* $L((x, y)) = 0$, 1 *lub* 2. *Dokładniej:*

$$L((x, y)) = 0 \iff x = y = 0;$$
$$L((x, y)) = 1 \iff x = y \neq 0;$$
$$L((x, y)) = 2 \iff x \neq y.$$

8.1.7. *Niech* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Wtedy* $L((x, y)) = 0$, 1 *lub* ∞. *Dokładniej:*

$$L((x, y, z)) = 0 \iff x = y = z = 0;$$
$$L((x, y, z)) = 1 \iff x = y = z \neq 0$$

oraz $L((x, y)) = \infty$ *w pozostałych przypadkach.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2 Cztery liczby i funkcje D, L

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zakładać będziemy, że $n = 4$ i badać będziemy rangi $L((a, b, c, d))$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zanotujmy najpierw następującą konsekwencję faktu 8.1.3.

8.2.1. *Niech* $A = \{a, b, c, d\}$, *gdzie* $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ *są liczbami rzeczywistymi. Niech* M *będzie zbiorem wszystkich rang postaci* $L(x)$, *gdzie* x *jest czteroelementowym ciągiem o wyrazach należących do zbioru* A. *Wtedy*

$$M = \Big\{ L((a, b, c, d)),\ L((a, c, b, d)),\ L((a, b, d, c)) \Big\}.$$

8.2.2. *Wszystkie czterowyrazowe ciągi, o parami różnych wyrazach należących do zbioru* $\{0, 1, 2, 3\}$, *mają skończone rangi i rangi te są równe* 3 *lub* 5.

D. Z 8.2.1 wynika, że wystarczy zbadać rangi ciągów 3210, 3120 i 3201. Działając na te ciągi funkcją D otrzymamy:

(0)	3210	(0)	3120	(0)	3201
(1)	1113	(1)	2123	(1)	1212
(2)	0022	(2)	1111	(2)	1111
(3)	0202	(3)	0000,	(3)	0000.
(4)	2222				
(5)	0000,				

Tutaj (i) oznacza $D^i(x)$, gdzie x jest danym ciągiem. Wszystkie więc rangi są skończone i są one równe 5 lub 3. ⊠

8.2.3. *Wszystkie czterowyrazowe ciągi, o parami różnych wyrazach należących do zbioru* $\{0, 1, 4, 9\}$, *mają skończone rangi i rangi te są równe* 4, 6 *lub* 8. ([SalS] 11).

D. Z 8.2.1 wynika, że wystarczy zbadać rangi ciągów 9410, 9140 i 9401. Działając na te ciągi funkcją D otrzymamy:

(0)	9410	(0)	9140	(0)	9401
(1)	5319	(1)	8349	(1)	5418
(2)	2284	(2)	5151	(2)	1373
(3)	0642	(3)	4444	(3)	2442
(4)	6222	(4)	0000,	(4)	2020
(5)	4004			(5)	2222
(6)	4040			(6)	0000.
(7)	4444				
(8)	0000,				

Tutaj (i) oznacza $D^i(x)$, gdzie x jest danym ciągiem. Wszystkie więc rangi są skończone i są one równe 8, 4 lub 6. ⊠

Wykażemy teraz twierdzenie Freedmana z 1948 roku ([Fre48]) mówiące o tym, że jeśli a, b, c, d są liczbami całkowitymi, to ranga ciągu (a, b, c, d) jest skończona. W tym celu najpierw udowodnimy:

8.2.4. *Jeśli a, b, c, d są liczbami całkowitymi, to wszystkie wyrazy ciągu*

$$D^4((a, b, c, d))$$

są całkowitymi liczbami parzystymi. ([Fre48], [SalS]).

D. ([SalS]). Niech (a, b, c, d) będzie ciągiem o wyrazach całkowitych. Rozpatrzmy reszty z dzielenia liczb a, b, c, d przez 2. Możliwych jest 16 następujących ciągów reszt:

$$\begin{array}{llll}(0,0,0,0), & (0,0,0,1), & (0,0,1,0), & (0,0,1,1),\\ (0,1,0,0), & (0,1,0,1), & (0,1,1,0), & (0,1,1,1),\\ (1,0,0,0), & (1,0,0,1), & (1,0,1,0), & (1,0,1,1),\\ (1,1,0,0), & (1,1,0,1), & (1,1,1,0), & (1,1,1,1).\end{array}$$

Analizujemy każdy przypadek. Dla przykładu załóżmy, że $(a, b, c, d) \equiv (0, 1, 1, 1) \pmod 2$. Wtedy:

$$\begin{aligned} D^1((a, b, c, d)) &\equiv (1, 0, 0, 1) \pmod 2,\\ D^2((a, b, c, d)) &\equiv (1, 0, 1, 0) \pmod 2,\\ D^3((a, b, c, d)) &\equiv (1, 1, 1, 1) \pmod 2,\\ D^4((a, b, c, d)) &\equiv (0, 0, 0, 0) \pmod 2\end{aligned}$$

i stąd wynika, że wszystkie wyrazy ciągu $D^4((a, b, c, d))$ są całkowitymi liczbami parzystymi. W ten sam sposób sprawdzamy wszystkie przypadki. ⊠

8.2.5 (Freedman 1948). *Każdy czterowyrazowy ciąg o wyrazach wymiernych ma skończoną rangę.* ([Fre48], [SalS]).

D. ([Fre48]). Niech a, b, c, d będą liczbami wymiernymi. Wykażemy, że $L((a, b, c, d)) < \infty$. Z faktu 8.1.5 wynika, że wystarczy to udowodnić dla nieujemnych liczb całkowitych.

Załóżmy więc, że a, b, c, d są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Niech $x = (a, b, c, d)$ i niech $A = \max\{a, b, c, d\}$. Jeśli $A = 1$, to bez trudu sprawdzamy, że $L(x) < \infty$. Załóżmy więc, że $A \geqslant 2$ oraz, że wszystkie czterowyrazowe ciągi nieujemnych liczb całkowitych, których największy wyraz jest mniejszy od A, mają skończoną rangę.

Jeśli $L(x) \leqslant 4$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $L(x) > 4$ i niech $y = D^4(x) = (a_1, b_1, c_1, d_1)$. Wtedy $L(x) = L(y) + 4$. Z faktu 8.2.4 wiemy, że wszystkie liczby a_1, b_1, c_1, d_1 są parzyste (oczywiście są to nieujemne liczby całkowite) i jest oczywiste, że $\max\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \leqslant A$. Zatem $\frac{a_1}{2}, \frac{b_1}{2}, \frac{c_1}{2}, \frac{d_1}{2}$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz

$$\max\left\{\frac{a_1}{2}, \frac{b_1}{2}, \frac{c_1}{2}, \frac{d_1}{2}\right\} \leqslant \frac{A}{2} < A.$$

Z założenia indukcyjnego wynika więc, że ciąg $z = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{b_1}{2}, \frac{c_1}{2}, \frac{d_1}{2}\right)$ ma skończoną rangę. Ale $L(z) = L(y)$ (patrz 8.1.4). Zatem,

$$L(x) = 4 + L(y) = 4 + L(z) < \infty.$$

Teza wynika więc na mocy indukcji. ⊠

Z powyższego dowodu wynika:

8.2.6 (Freedman 1948). *Niech a, b, c, d będą nieujemnymi liczbami całkowitymi i niech $A = \max\{a, b, c, d\}$. Wtedy*

$$L((a, b, c, d)) \leqslant 4k,$$

gdzie k jest najmniejszą nieujemną liczbą całkowitą taką, że $A < 2^k$. ([Fre48], [SalS]).

Łatwo wykazać następujące trzy stwierdzenia.

8.2.7. *Jeśli a, b, c, d są takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, że $a \geqslant c \geqslant b \geqslant d$, to*

$$L((a, b, c, d)) \leqslant 4.$$

([SalS] 15).

8.2.8. *Jeśli a, b, c, d są takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, że $a \geqslant b \geqslant d \geqslant c$, to*

$$L((a, b, c, d)) \leqslant 6.$$

([SalS] 16).

8.2.9. *Jeśli a, b, c, d są nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ oraz co najmniej dwie z tych liczb są identyczne, to*

$$L((a, b, c, d)) \leqslant 6.$$

([SalS] 17).

Z powyższych faktów wynika, że jeśli a, b, c, d są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to problem dotyczący znalezienia rangi ciągu (a, b, c, d) jest najbardziej skomplikowany w przypadku, gdy $a > b > c > d$. Tym przypadkiem zajmiemy się w następnym podrozdziale.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3 Czteroelementowe ciągi dowolnej rangi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale rozpatrujemy w dalszym ciągu przypadek $n = 4$. Podamy pewien algorytm na konstruowanie czteroelementowych ciągów dowolnej (skończonej) rangi. Przez E oznaczać będziemy funkcję z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$ określoną wzorem:

$$E((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \Big(|x_1 - x_4|,\ |x_1 - x_2|,\ |x_2 - x_3|,\ |x_3 - x_4|\Big),$$

dla $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Dla przykładu:

$$E\Big((9, 6, 5, 2)\Big) = (7, 3, 1, 5).$$

Funkcja ta nieco różni się od funkcji D, ale nie ma to wpływu na badanie rangi danego czteroelementowego ciągu. Rangą ciągu $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ jest najmniejsza nieujemna liczba całkowita m taka, że

$$E^m(x) = (0, 0, 0, 0).$$

Niech (a, b, c, d) będzie ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych takim, że $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Mówić będziemy, że ciąg ten jest *addytywny*, jeśli

$$a = b + c + d.$$

Jeśli ciąg $x = (a, b, c, d)$ jest addytywny, to ciąg $E(x)$ oczywiście nie musi być addytywny.

Można jednak udowodnić:

8.3.1 (Freedman 1948)**.** *Niech* (a,b,c,d) *będzie addytywnym ciągiem takim, że*

$$a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0.$$

Wtedy:

(i) *istnieje taki ciąg* (a',b',c',d')*, że* $a' \geqslant b' \geqslant c' \geqslant d' \geqslant 0$ *oraz*

$$a'-d'=a,\ \ a'-b'=b,\ \ b'-c'=c,\ \ c'-d'=d;$$

(ii) *istnieje ponadto taki addytywny ciąg* $(a",b",c",d")$*, że* $a" \geqslant b" \geqslant c" \geqslant d" \geqslant 0$ *oraz*

$$L\Big((a",b",c",d")\Big) = L\Big((a',b',c',d')\Big)$$

i wtedy mamy: $\Big((a",b",c",d")\Big) = L\Big((a,b,c,d)\Big) + 1.$ ([Fre48], [SalS] 20).

D. ([Fre48], [SalS]). Mamy na początku $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$, $a = b+c+d$. Przyjmijmy:

$$a'=a,\ \ b'=a-b,\ \ c'=a-b-c,\ \ d'=0.$$

Wtedy $a' = b+c+d$, $b' = c+d$, $c' = d$ oraz $d' = 0$ i stąd wynika, że $a' \geqslant b' \geqslant c' \geqslant d' \geqslant 0$ oraz

$$a'-d'=a,\quad a'-b'=b,\quad b'-c'=c,\quad c'-d'=d.$$

Warunek (i) został więc wykazany. Zauważmy, że

$$L((a',b',c',d')) = L((a,b,c,d)) + 1.$$

Niech $\delta = a' - (b'+c'+d')$. Wtedy $\delta = b-d$, więc $\delta \geqslant 0$. Jeśli $\delta = 0$, to ciąg (a',b',c',d') jest addytywny, przyjmujemy $(a",b",c",d") = (a',b',c',d')$ i mamy warunek (ii).

Załóżmy, że $\delta > 0$. Niech

$$a" = 2a'+\delta,\ \ b" = 2b'+\delta,\ \ c" = 2c'+\delta,\ \ d" = 2d'+\delta.$$

Wtedy $a" \geqslant b" \geqslant c" \geqslant d" \geqslant 0$ i ciąg $(a",b",c",d")$ jest addytywny, gdyż:

$$b"+c"+d" = 2(b'+c'+d') + 3\delta = 2(a'-\delta) + 3\delta = 2a'+\delta = a".$$

Z faktu 8.1.4 wynika, że $L\Big((a",b",c",d")\Big) = L\Big((a',b',c',d')\Big) = L((a,b,c,d)) + 1.$ ⊠

W powyższym dowodzie podany jest przepis na konstruowanie czteroelementowych ciągów dowolnie dużej rangi. Startujemy, na przykład, od ciągu $(a,b,c,d) = (1,1,0,0)$. Jest to addytywny ciąg rangi 3. Otrzymujemy wtedy najpierw ciąg $(a',b',c',d') = (a, a-b, a-b-c, 0) = (1,0,0,0)$ z deltą równą $a' - (b'+c'+d') = 1$. Nowy ciąg

$$(a",b",c",d") = (2a'+\delta, 2b'+\delta, 2c'+\delta, 2d'+\delta) = (3,1,1,1)$$

jest addytywny i jego ranga jest równa 4. Powtarzając to samo dla ciągu $(3,1,1,1)$, otrzymujemy addytywny ciąg $(3,2,1,0)$, rangi 5. Następnie otrzymamy addytywny ciąg $(4,2,1,1)$ z rangą równą 6, itd. Spójrzmy na przykłady (Maple):

8.3.2.

ranga	*ciąg*	*ranga*	*ciąg*
3	$(1,1,0,0)$	3	$(2,1,1,0)$
4	$(3,1,1,1)$	4	$(5,3,1,1)$
5	$(3,2,1,0)$	5	$(6,3,2,1)$
6	$(4,2,1,1)$	6	$(7,4,2,1)$
7	$(9,5,3,1)$	7	$(17,9,5,3)$
8	$(11,6,3,2)$	8	$(20,11,6,3)$
9	$(13,7,4,2)$	9	$(24,13,7,4)$
10	$(31,17,9,5)$	10	$(57,31,17,9)$
11	$(37,20,11,6)$	11	$(68,37,20,11)$
12	$(44,24,13,7)$	12	$(81,44,24,13)$
13	$(105,57,31,17)$	13	$(193,105,57,31)$
14	$(125,68,37,20)$	14	$(230,125,68,37)$
15	$(149,81,44,24)$	15	$(274,149,81,44)$
16	$(355,193,105,57)$	16	$(653,355,193,105)$
17	$(423,230,125,68)$	17	$(778,423,230,125)$
18	$(504,274,149,81)$	18	$(927,504,274,149)$
19	$(1201,653,355,193)$	19	$(2209,1201,653,355)$
20	$(1431,778,423,230)$.	20	$(2632,1431,778,423)$.

8.3.3.

ranga	*ciąg*	*ranga*	*ciąg*
5	$(5,4,1,0)$	5	$(5,3,2,0)$
6	$(7,3,2,2)$	6	$(13,7,3,3)$
7	$(15,9,5,1)$	7	$(15,8,5,2)$
8	$(19,10,5,4)$	8	$(18,10,5,3)$
9	$(22,12,7,3)$	9	$(43,23,13,7)$
10	$(53,29,15,9)$	10	$(51,28,15,8)$
11	$(63,34,19,10)$	11	$(61,33,18,10)$
12	$(75,41,22,12)$	12	$(145,79,43,23)$
13	$(179,97,53,29)$	13	$(173,94,51,28)$
14	$(213,116,63,34)$	14	$(206,112,61,33)$
15	$(254,138,75,41)$	15	$(491,267,145,79)$
16	$(605,329,179,97)$	16	$(585,318,173,94)$
17	$(721,392,213,116)$	17	$(697,379,206,112)$
18	$(859,467,254,138)$	18	$(1661,903,491,267)$
19	$(2047,1113,605,329)$	19	$(1979,1076,585,318)$
20	$(2439,1326,721,392)$.	20	$(2358,1282,697,379)$.

8.3.4. *Przykłady ciągów rangi* 50 :

$(280947697, 152748176, 83047505, 45152016)$,
$(462945298, 251698272, 136845585, 74401441)$,
$(478847889, 260344336, 141546355, 76957198)$,
$(516743378, 280947697, 152748176, 83047505)$,
$(644942899, 350648368, 190643665, 103650866)$
$(660845490, 359294432, 195344435, 106206623)$
$(676748081, 367940496, 200045205, 108762380)$,
$(752539059, 409147218, 222448847, 120942994)$ (Maple).

8.3.5. *Przykłady ciągów rangi* 100 :

(234756120799924099, 127634323541132545, 69393379351699393, 37728417907092161),
(386830870875735845, 210315694265244898, 114346332168719585, 62168844441771362),
(400118862248148805, 217540229175172929, 118274232421057795, 64304400651918081),
(431783823692756037, 234756120799924099, 127634323541132545, 69393379351699393),
(538905620951547591, 292997064989357251, 159299284985739777, 86609270976450563),
(552193612323960551, 300221599899285282, 163227185238077987, 88744827186597282),
(565481603696373511, 307446134809213313, 167155085490416197, 90880383396744001),
(628811526585587975, 341877918058715653, 185875267730565697, 101058340796306625) (Maple).

8.3.6. *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej m istnieją takie nieujemne liczby całkowite a, b, c, d, że ranga ciągu (a, b, c, d) jest równa m.* ([SalS] 21).

D. Dla $m = 0, 1, 2, 3$ mamy: $0 = L((0,0,0,0))$, $1 = L((1,1,1,1))$, $2 = L((1,0,1,0))$, $3 = L((1,1,0,0))$. Startując od addytywnego ciągu $(1,1,0,0)$, otrzymujemy (na mocy twierdzenia 8.3.1) serię ciągów rangi odpowiednio równej $4, 5, 6$, itd. ⊠

Rozważmy ciąg (t_n) zdefiniowany rekurencyjnie w następujący sposób: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ oraz

$$t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n,$$

dla $n \geqslant 0$. Angielska nazwa tego ciągu: "tribonacci sequence". Ciągiem tym zajmowaliśmy się już w [N-7]. Spójrzmy na jego początkowe wyrazy.

8.3.7.

$t_0 = 0$,	$t_{10} = 149$,	$t_{20} = 66012$,	$t_{30} = 29249425$,
$t_1 = 1$,	$t_{11} = 274$,	$t_{21} = 121415$,	$t_{31} = 53798080$,
$t_2 = 1$,	$t_{12} = 504$,	$t_{22} = 223317$,	$t_{32} = 98950096$,
$t_3 = 2$,	$t_{13} = 927$,	$t_{23} = 410744$,	$t_{33} = 181997601$,
$t_4 = 4$,	$t_{14} = 1705$,	$t_{24} = 755476$,	$t_{34} = 334745777$,
$t_5 = 7$,	$t_{15} = 3136$,	$t_{25} = 1389537$,	$t_{35} = 615693474$,
$t_6 = 13$,	$t_{16} = 5768$,	$t_{26} = 2555757$,	$t_{36} = 1132436852$,
$t_7 = 24$,	$t_{17} = 10609$,	$t_{27} = 4700770$,	$t_{37} = 2082876103$,
$t_8 = 44$,	$t_{18} = 19513$,	$t_{28} = 8646064$,	$t_{38} = 3831006429$,
$t_9 = 81$,	$t_{19} = 35890$,	$t_{29} = 15902591$,	$t_{39} = 7046319384$,

8.3.8.
$$\begin{aligned} t_{50} &= 5742568741225, \\ t_{100} &= 98079530178586034536500564, \\ t_{200} &= 28610320653810477165032088685001500201865067503083660 \end{aligned}$$
(Maple).

Niech $T_2 = \Big(t_2, t_1, t_0, 0\Big)$ oraz

$$T_n = \Big(t_n,\ t_{n-1},\ t_{n-2},\ t_{n-3}\Big),$$

dla $n \geqslant 3$. Każde takie T_n jest addytywnym czterowyrazowym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych. Łatwo sprawdzić, że ciąg ten ma następujące własności:

8.3.9.

(1) $E^3(T_n) = 2T_{n-2}$,

(2) $L(T_n) = 3\left[\dfrac{n}{2}\right]$. ([SalS] 23).

Korzystając z tych własności, można udowodnić:

8.3.10 (W.A.Webb 1982)**.** *Niech* $x = (a, b, c, d)$ *będzie addytywnym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych takim, że* $a > b > c > d$. *Wtedy*

$$L(x) \leqslant 1 + 3\left[\frac{n}{2}\right],$$

gdzie n *jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że* $a \leqslant t_n$. ([Webb], [SalS] 25).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4 Czteroelementowe ciągi nieskończonej rangi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednim podrozdziale badaliśmy czteroelementowe ciągi liczb całkowitych. Wiemy, na mocy twierdzenia 8.2.5, że każdy taki ciąg ma skończoną rangę. Czteroelementowe ciągi liczb wymiernych również mają skończoną rangę. To wynika z 8.1.4 i 8.2.5.

8.4.1. *Ciąg* $\left(\pi, e, \sqrt{2}, 0\right)$ *ma skończoną rangę, równą* 8. ([SalS] 26).

Istnieją jednak czteroelementowe ciągi liczb rzeczywistych posiadające nieskończoną rangę. Wszystkie takie ciągi są opisane w ([Magy]). W tym opisie istotną rolę odgrywa wielomian

$$q(x) = x^3 + 2x^2 - 2.$$

8.4.2. *Wielomian* $q(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ *ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Pierwiastek ten należy do przedziału* $(0, 1)$ ([SalS] 27).

8.4.3 (Z. Magyar 1984)**.** *Niech* p *będzie jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu* $q(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ *i niech*

$$u = \Big((1+p)^3,\ (1+p)^2,\ (1+p),\ 1\Big).$$

Wtedy $L(u) = \infty$, *tzn. ciąg* u *ma nieskończoną rangę.* ([Magy], [SalS] 28).

D. Przypomnijmy, że $E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest określone wzorem

$$E\Big((a, b, c, d)\Big) = \Big(|a-d|,\ |a-b|,\ |b-c|,\ |c-d|\Big),$$

dla wszystkich $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
E(u) &= E\Big((1+p)^3, (1+p)^2, (1+p), 1\Big) \\
&= \Big((1+p)^3 - 1, (1+p)^3 - (1+p)^2, (1+p)^2 - (1+p), (1+p) - 1\Big) \\
&= \Big(p^3 + 3p^2 + 3p, p^3 + 2p^2 + p, p^2 + p, p\Big) \\
&= p\Big(p^2 + 3p + 3, p^2 + 2p + 1, p + 1, 1\Big) \\
&= p\Big((1+p)^3, (1+p)^2, (1+p), 1\Big) \\
&= pu.
\end{aligned}$$

(Wykorzystaliśmy równość $p^3 = -2p^2 + 2$). Stąd wynika, że dla każdej liczby naturalnej n mamy:

$$E^n(u) = p^n u \neq (0, 0, 0, 0).$$

Zatem $L(u) = \infty$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5 Ciągi n-elementowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną. Zajmować się będziemy n-wyrazowymi ciągami liczb całkowitych (lub wymiernych). Udowodnimy, że każdy taki ciąg ma skończoną rangę wtedy i tylko wtedy, gdy n jest potęgą dwójki. Jest to następne twierdzenie Freedmana z 1948 roku. W literaturze można znaleźć kilka różnych dowodów tego twierdzenia ([Fre48], [Mill]). Przedstawimy algebraiczny dowód podany w 1979 roku przez Zvengrowskiego ([Zve], patrz również [SalS] 41-44).

Zakładać będziemy, że $D : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ jest funkcją określoną wzorem

$$D\Big((a_1, a_2, \dots, a_n)\Big) = \Big(|a_1 - a_2|,\ |a_2 - a_3|,\ \dots,\ |a_{n-1} - a_n|,\ |a_n - a_1|\Big),$$

dla wszystkich ciągów $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Rangę ciągu $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ definiujemy tak jak poprzednio. Jeśli $D^m(a) = (0, 0, \dots, 0)$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej m, to najmniejsze takie m oznaczamy przez $L(a)$ i nazywamy rangą ciągu a. Jeśli takie m nie istnieje, to przyjmujemy, że ranga jest równa ∞ i fakt ten zapisujemy jako $L(a) = \infty$.

Ustalmy pewne oznaczenia. Przez $\mathbb{Z}_2$ oznaczamy, tak jak zwykle, zbiór liczb całkowitych modulo 2. Jest to dwuelementowy zbiór $\{0, 1\}$, który jest ciałem ze względu na dodawanie i mnożenie w arytmetyce modulo 2. Jeśli a jest liczbą całkowitą, to przez $r(a)$ oznaczać będziemy resztę z dzielenia a przez 2. Mamy więc funkcję

$$r : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2,$$

która jest homomorfizmem pierścieni. Zauważmy, że:

8.5.1. *Jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, to $r(|a - b|) = r(a + b)$.*

Zbiory $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$ oraz $\mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n}$ są pierścieniami; są to produkty odpowiednich pierścieni. Przy pomocy homomorfizmu $r : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ definiujemy pierścieniowy homomorfizm $R : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}_2^n$, przyjmując:

$$R\Big((a_1, a_2, \dots, a_n)\Big) = \Big(r(a_1), r(a_2), \dots, r(a_n)\Big),$$

dla wszystkich $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Przy takich oznaczeniach mamy:

8.5.2. *Dla każdego ciągu $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ zachodzą równości*

$$R(D(a)) = R\Big((a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1)\Big) = R(a) + R\Big((a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)\Big).$$

Rozważmy jeszcze trzy nowe funkcje: $\bar{r}$, η oraz ω. Pierwszą z nich jest homomorfizm pierścieni wielomianów

$$\bar{r} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2[x], \quad \sum a_i x^i \longmapsto \sum r(a_i) x^i.$$

Oznaczmy prze I ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[x]$ generowany przez wielomian x^n+1, tzn.

$$I = (x^n+1) = \Big\{(x^n+1)g;\ g \in \mathbb{Z}_2[x]\Big\}$$

i niech $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$ będzie pierścieniem ilorazowym z naturalnym pierścieniowym homomorfizmem

$$\eta : \mathbb{Z}_2[x] \to A, \quad u \longmapsto u + I.$$

Dla każdego ciągu $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ definiujemy wielomian $\omega(a) \in \mathbb{Z}[x]$, przyjmując:

$$\omega(a) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Mamy zatem funkcję $\omega : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}[x]$. Funkcja ta nie jest oczywiście homomorfizmem pierścieni, ale jest homomorfizmem grup addytywnych tych pierścieni.

Przy pomocy powyższych funkcji definiujemy funkcję $\gamma : \mathbb{Z}^n \to A$, będącą złożeniem funkcji $\omega : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}[x]$, $\bar{r} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2[x]$ oraz $\eta : \mathbb{Z}_2[x] \to A = \mathbb{Z}_2[x]/I$. Mamy więc:

$$\gamma = \eta \circ \bar{r} \circ \omega.$$

Dla przykładu, jeśli $n = 5$ oraz $a = (3, 2, 7, -12, 9) \in \mathbb{Z}^5$, to

$$\gamma(a) = \Big(r(3)x^4 + r(2)x^3 + r(7)x^2 + r(-12)x^1 + r(9)\Big) + I = \Big(x^4 + x^2 + 1\Big) + I.$$

Funkcja γ odgrywać będzie istotną rolę w dowodzie zapowiedzianego twierdzenia. Zanotujmy najpierw kilka własności tej funkcji.

8.5.3. *Jeśli $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, to następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) $\gamma(a) = 0$.

(2) $R(a) = 0 = (0, \ldots, 0)$, *tzn. wszystkie liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parzyste.* ([SalS] 42).

D. (2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $R(a) = 0$. Wtedy $(r(a_1), \ldots, r(a_n)) = (0, \ldots, 0)$, więc $r(a_1) = r(a_2) = \cdots = r(a_n) = 0$ i stąd $\bar{r}\omega(a) = r(a_1)x^{n-1} + r(a_2)x^{n-2} + \cdots + r(a_n) = 0$. Zatem $\gamma(a) = \eta\left(\bar{r}\omega(a)\right) = \eta(0) = 0$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że $\gamma(a) = 0$. Wtedy

$$\Big(r(a_1)x^{n-1} + r(a_2)x^{n-2} + \cdots + r(a_n)\Big) + I$$

jest elementem zerowym w pierścieniu ilorazowym $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$. Istnieje zatem taki wielomian $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[x]$ zachodzi równość

$$r(a_1)x^{n-1} + r(a_2)x^{n-2} + \cdots + r(a_n) = (x^n+1)g.$$

Porównując stopnie (przypomnijmy, że $\mathbb{Z}_2[x]$ jest pierścieniem bez dzielników zera), otrzymujemy $r(a_1) = r(a_2) = \cdots = r(a_n) = 0$. Zatem $R(a) = (r(a_1), \ldots, r(a_n)) = (0, 0, \ldots, 0)$. ⊠

8.5.4. *Jeśli $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, to w pierścieniu $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$ zachodzi równość*

$$\gamma\Big(D(a)\Big) = \eta(x+1) \cdot \gamma(a).$$

([SalS] 42).

$$
\begin{aligned}
\textbf{D.}\quad \gamma\Big(D(a)\Big) &= \eta\bar{r}\omega\Big(D(a)\Big) = \eta\bar{r}\omega\Big(\,(|a_1-a_2|, |a_2-a_3|, \dots, |a_n-a_1|)\,\Big)\\
&= \eta\Big(r(|a_1-a_2|)x^{n-1} + r(|a_2-a_3|)x^{n-2} + \dots + r(|a_n-a_1|)\Big)\\
&= \eta\Big(r(a_1+a_2)x^{n-1} + r(a_2+a_3)x^{n-2} + \dots + r(a_n+a_1)\Big)\\
&= \eta\bar{r}\Big((a_1+a_2)x^{n-1} + (a_2+a_3)x^{n-2} + \dots + (a_n+a_1)\Big)\\
&= \eta\bar{r}\Big(\,(a_1x^{n-1} + \dots + a_n) + x\,(a_1x^{n-1} + \dots + a_n) + a_1x^n + a_1\Big)\\
&= \gamma(a) + \eta(x)\gamma(a) + \eta\Big(r(a_1)(x^n+1)\Big)\\
&= \gamma(a) + \eta(x)\gamma(a)\\
&= \eta(x+1)\gamma(a).
\end{aligned}
$$

Wykorzystaliśmy równość $\eta\Big(r(a_1)(x^n+1)\Big) = 0$. Ta równość zachodzi, gdyż wielomian x^n+1 należy do ideału I. ⊠

Z powyższej równości wynika:

8.5.5. *Jeśli $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, to dla każdego $m \geqslant 1$, w pierścieniu $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$ zachodzi równość*

$$\gamma\Big(D^m(a)\Big) = \eta\Big((x+1)^m\Big) \cdot \gamma(a).$$

Wykorzystamy również następujący, dobrze znany, fakt.

8.5.6. *Jeśli $s \geqslant 1$ jest liczbą naturalną, to w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[x]$ zachodzi równość*

$$(x+1)^s = x^s + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy s jest potęgą dwójki. ([N11]).

Teraz możemy przedstawić dowód zapowiedzianego wcześniej twierdzenia.

8.5.7 (Freedman 1948)**.** *Niech $n \geqslant 2$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(*a*) *Każdy ciąg $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ma skończoną rangę.*

(*b*) *Liczba n jest potęgą dwójki.*

([Fre48], [Mill], [Zve], [SalS]).

D. ([Zve], [SalS] 42).

(b) ⇒ (a). Dowód tej części będzie podobny do, przedstawionego w tej książce, dowodu twierdzenia 8.2.5.

Załóżmy, że $n = 2^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Niech $a = (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Wykażemy, że $L(a) < \infty$. Z faktu 8.1.5 wynika, że wystarczy to udowodnić dla nieujemnych liczb całkowitych. Załóżmy więc, że $a_1, a_2, \dots, a_n$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Niech $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Jeśli $M = 0$, to oczywiście $L(a) < \infty$, gdyż wtedy $L(a) = 0$. Załóżmy więc, że $M \geqslant 1$ oraz, że wszystkie n-wyrazowe ciągi nieujemnych liczb całkowitych, których największy wyraz jest mniejszy od M, mają skończoną rangę.

Jeśli $L(a) \leqslant n = 2^k$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $L(a) > n$ i niech

$$a' = D^n(a) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n).$$

Wtedy $L(a) = L(a') + n$. Wiemy (patrz 8.5.5), że w pierścieniu $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$ zachodzi równość

$$\gamma(a') = \gamma\Big(D^n(a)\Big) = \eta\Big((x+1)^n\Big)\gamma(a).$$

Ponieważ n jest potęgą dwójki, więc wielomian $(x+1)^n$, należący do $\mathbb{Z}_2[x]$, jest równy $x^n + 1$ (patrz 8.5.6). Wielomian ten więc należy do ideału I. Zatem,

$$\eta((x+1)^n) = 0$$

i stąd $\gamma(a') = 0$. To z kolei oznacza, na mocy 8.5.3, że wszystkie liczby $a'_1, \dots, a'_n$ są parzyste (oczywiście są to nieujemne liczby całkowite). Jest ponadto oczywiste, że $\max\{a'_1, \dots, a'_n\} \leqslant M$. Zatem, $\frac{a'_1}{2}$, $\frac{a'_2}{2}$, $\dots$, $\frac{a'_n}{2}$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi i największa z nich jest mniejsza lub równa $\frac{M}{2}$, czyli jest mniejsza od M. Z założenia indukcyjnego wynika więc, że ciąg

$$b = \left(\frac{a'_1}{2}, \frac{a'_2}{2}, \dots, \frac{a'_n}{2}\right)$$

ma skończoną rangę. Ale $L(a') = L(b)$ (patrz 8.1.4). Zatem

$$L(a) = n + L(a') = n + L(b) < \infty.$$

Teza wynika więc na mocy indukcji.

(a) $\Rightarrow$ (b). Załóżmy teraz, że każdy ciąg $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ma skończoną rangę. Rozpatrzmy więc, na przykład, ciąg

$$e = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Zauważmy, że $\gamma(e) = 1$.

Istnieje liczba naturalna m taka, że $D^m(e) = (0, 0, \dots, 0)$. Wtedy $\gamma\Big(D^m(e)\Big) = 0$. Ale

$$\gamma\Big(D^m(e)\Big) = \eta\Big((x+1)^m\Big)\gamma(e) = \eta\Big((x+1)^m\Big),$$

czyli w pierścieniu $A = \mathbb{Z}_2[x]/I$ zachodzi równość $\eta\Big((x+1)^m\Big) = 0$. Istnieje więc taki wielomian $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[x]$ zachodzi równość

$$(x+1)^m = (x^n + 1) \cdot g.$$

Ponieważ pierścień $\mathbb{Z}_2[x]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, więc z powyżej równości wynika, że wielomian $x^n + 1$ musi być postaci $(x+1)^n$. To natomiast jest tylko możliwe wtedy (patrz 8.5.6), gdy n jest potęgą dwójki. ⊠

Z twierdzeń 8.5.7 i 8.1.4 wynika natychmiast następujące twierdzenie dla ciągów liczb wymiernych.

8.5.8 (Freedman 1948)**.** *Niech $n \geqslant 2$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(*a*) *Każdy ciąg $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ ma skończoną rangę.*

(*b*) *Liczba n jest potęgą dwójki.*

([Fre48], [Mill], [Zve], [SalS]).

★ Anna Przybylska, *Twierdzenie Freedmana o czterech liczbach i jego uogólnienia*, [Pmgr] 2011.

9 Punkty kratowe

Każdy punkt na płaszczyźnie, którego współrzędne są liczbami całkowitymi, nazywamy *punktem kratowym*. Podobnie definiuje się punkty kratowe w dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ jest *kratowy*, jeśli wszystkie liczby $x_1, \ldots, x_n$ są są całkowite.

9.1 Punkty kratowe na prostych i odcinkach

9.1.1. *Istnieje na płaszczyźnie prosta, na której leży tylko jeden punkt kratowy.* ([S59a] 45).

9.1.2. *Załóżmy, że na prostej l leży dokładnie jeden punkt kratowy. Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje punkt kratowy, którego odległość od prostej l jest mniejsza od ε.* ([Kw] 12/1974 39, [Brok]).

9.1.3. *Jeśli prosta ma co najmniej dwa punkty kratowe, to ma ich nieskończenie wiele.* ([S59a] 45, [Brok]).

9.1.4. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$. Załóżmy, że punkt kratowy (x_0, y_0) leży na prostej*

$$ax + by = n.$$

Wtedy punkty kratowe $(x_0 - b, y_0 + a)$ i $(x_0 + b, y_0 - a)$ leżą również na tej prostej i są to punkty sąsiadujące z punktem (x_0, y_0). ([Dlt] 11/1999 M898).

9.1.5. *Jeśli na danej prostej leży nieskończenie wiele punktów kratowych, to odległości pomiędzy dowolnymi sąsiednimi punktami kratowymi tej prostej są jednakowe.* ([Kw] 12/1974 39).

9.1.6. *Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych. Udowodnić, że środek co najmniej jednego z odcinków łączących te punkty jest również punktem kratowym.*

9.1.7. *Na płaszczyźnie danych jest n punktów kratowych, gdzie $n \geqslant 5$. Udowodnić, że środki co najmniej*

$$\binom{\langle n/4 \rangle}{2}$$

odcinków łączących te punkty są punktami kratowymi. Symbol $\langle x \rangle$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż x. ([Min] 5(2001) s.97).

9.1.8. *Na odcinku łączącym punkty kratowe (a,b) i (c,d) leży dokładnie*

$$\mathrm{nwd}(c-a, d-b) + 1$$

punktów kratowych.

9.1.9. *Na odcinku w $\mathbb{R}^n$ łączącym punkty kratowe $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ leży dokładnie*

$$\mathrm{nwd}(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) + 1$$

punktów kratowych.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2 Wielokąty i punkty kratowe (bez pól)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2.1. *Nie istnieje na płaszczyźnie żaden trójkąt równoramienny o wierzchołkach w punktach kratowych i kącie między ramionami równym* 45^o. ([B-zm] 120).

9.2.2. *Opisać wszystkie trójkąty prostokątne o wierzchołkach w punktach kratowych i przeciwprostokątnej równoległej do osi odciętych.* ([Mat] 1-2/1955 59).

R. Niech p, q będą długościami rzutów przyprostokątnych na przeciwprostokątną. Trójkąt spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p = km^2, \quad q = kn^2,$$

gdzie $k, m, n \in \mathbb{N}$. ⊠

9.2.3. *Nie istnieje żaden trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych i nieparzystych bokach.* ([Mat] 5/1995 298).

9.2.4. *Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych, który ani wewnątrz, ani na brzegu nie zawiera żadnych innych punktów kratowych, jest trójkątem prostokątnym lub rozwartokątnym.* ([Kw] 12/1974 39).

9.2.5. *Dla dowolnej liczby naturalnej* n *istnieje na płaszczyźnie kwadrat zawierający wewnątrz dokładnie* n *punktów kratowych.* ([S59] 462, [S59a] 41).

9.2.6. *Jedynym wielokątem foremnym o wierzchołkach w punktach kratowych jest kwadrat.* ([S59a] 44, [Mat] 3/1960 181, [Kw] 7/1975 42).

9.2.7 (H. Steinhaus). *Czy można znaleźć kwadrat o bokach całkowitych i taki punkt* (*na płaszczyźnie kwadratu*), *którego wszystkie cztery odległości od wierzchołków są liczbami całkowitymi?* ([Mat] 5/1965 228).

U. Pytanie to było zadaniem 720 Konkursu Zadaniowego czasopisma [Mat] zaopatrzonym w uwagę, że autor nie zna rozwiązania. Nikt tego zadania (w 1965 roku) nie rozwiązał. ⊠

9.2.8. *Dwa wierzchołki kwadratu są wymierne. Wykazać, że pozostałe wierzchołki również są wymierne.* ([Mat] 2/1979 120).

9.2.9. *Jeśli trzy wierzchołki równoległoboku są punktami kratowymi, to czwarty wierzchołek również jest punktem kratowym.* ([Kw] 12/1974 40).

9.2.10. *Na płaszczyźnie dany jest zbiór* $2n$ *punktów* $(n \geqslant 2)$, *których obie współrzędne są liczbami całkowitymi z przedziału* $[1, n]$. *Wykazać, że pewne cztery punkty tego zbioru są wierzchołkami równoległoboku.* ([Dlt] 7/2003 z.457).

9.2.11. *Wierzchołkami wypukłego* n*-kąta są punkty kratowe. Jeśli wewnątrz wielokąta i na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych, to* $n \leqslant 4$. ([Min] 5(2001) s.97).

9.2.12. *Wierzchołkami wielokąta są punkty kratowe. Jeśli długości boków tego wielokąta są liczbami całkowitymi, to obwód tego wieokąta jest liczbą parzystą.* ([Min] 5(2001) s.100).

9.2.13. *Nie istnieje łamana zamknięta o wierzchołkach w punktach kratowych posiadająca nieparzystą liczbę boków tej samej długości.* ([Min] 5(2001) s.101).

9.2.14. *Nie istnieją takie cztery punkty w $\mathbb{R}^2$, że odległości każdych dwóch z nich są nieparzystymi liczbami naturalnymi.* ([Putn] 1993).

9.2.15. *Ile punktów kratowych leży na bokach i wewnątrz trójkąta ograniczonego prostymi*

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}, \quad x = 10 \quad \textit{oraz} \quad y = 0\,?$$

Odp. 37. ([Kw] 5/1976 46).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3 Pola wielokątów i punkty kratowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3.1 (Twierdzenie Picka)**.** *Jeśli A jest wielokątem na płaszczyźnie o wierzchołkach w punktach kratowych, to*

$$S = W + \frac{1}{2}B - 1,$$

gdzie S jest polem wielokąta A, W jest liczbą punktów kratowych leżących wewnątrz tego wielokąta, a B jest liczbą punków kratowych leżących na jego brzegu.
([Kw] 12/1974 39, [Brok], [Mat] 1/1989 15).

9.3.2. *Na płaszczyźnie dany jest wielokąt o wierzchołkach w punktach kratowych. Wiadomo, że wewnątrz tego wielokąta leży* 7 *punktów kratowych a na jego brzegu takich punktów jest* 6*. Znaleźć pole wielokąta.* Odp. 9.

9.3.3. *Każdy równoległobok o wierzchołkach w punktach kratowych, który ani wewnątrz, ani na brzegu nie zawiera żadnych innych punktów kratowych, ma pole równe* 1. ([S59a] 45).

9.3.4. *Podwojone pole każdego wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych jest liczbą naturalną.* (Wynika z 10.7.8, [BoN]).

9.3.5. *Pole dowolnego wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych jest nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$.* Dowód. *Wynika to z* 9.3.4. ([Min] 5(2001) s.106).

9.3.6. *Dla trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Ani wewnątrz, ani na brzegu tróját nie zawiera żadnych innych* (*oprócz wierzhołków*) *punktów kratowych.*

(2) *Pole tego trójkąta jest równe $\dfrac{1}{2}$.*

([Kw] 12/1974 39, [Brok] 31, [Min] 5(2001) s.106).

9.3.7. *Pole trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych*

$$(0,0), \quad (u_{n-1}, u_n), \quad (u_n, u_{n+1}),$$

gdzie (u_n) *jest ciągiem Fibonacciego, jest równe* $\frac{1}{2}$. Dowód. *Jest to konsekwencja znanej równości* $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^{n-1}$. ([Min] 5(2001) s.106).

9.3.8. *Pole trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych* $(0,0), (a,b)$ *i* (c,d) *jest równe*

$$\frac{1}{2}|ad - bc|.$$

(Patrz 10.7.6).

9.3.9. *Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych* $(0,0), (a,b)$ *i* (c,d) *nie ma wewnątrz, ani na brzegu żadnych innych (oprócz wierzhołków) punktów kratowych wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|ad - bc| = 1.$$

Dowód. *Wynika to z* 9.3.6 *i* 9.3.8.

★ Zb. Bobiński, M. Uscki, *Niekonwencjonalne konstrukcje i wielokąty krat.*, [Min] 5(2001) 79-119.
J. Brokos, *Wielokąty foremne na płaszczyźnie z kratą*, [Brok] 61-65.
J. Dąbrowski, *Twierdzenie Picka w nauczaniu*, [Mat] 1/1989 19-33.
W. Galpierin, W. Kalinnikow, *Wielokąty na papierze w kratkę*, [Kw] 6/1978 38-41.
B. Grunbaum, G. C. Shephard, *Pick's theorem*, [Mon] 100(2)(1993) 150-161.
A. A. Jegorow, *Kraty i wielokąty foremne*, [Kw] 12/1974 26-33.
J. Kołodziejczyk, *Twierdzenie Picka*, [Mat] 1/1989 15-19.
A. Kusznirenko, *Punkty kratowe w wielokątach i wielościanach*, (O uogólnieniach twierdzenia Picka), [Kw] 4/1977 13-20.
J. Trainin, *An elementary proof of Pick's theorem*, [MG] 91(522)(2007) 536-540.
A. Wiechetek, *O twierdzeniu Piecka raz jeszcze*, [Mat] 2-3/1990 155-159.
N. B. Wasilew, *O twierdzeniu Picka*, [Kw] 12/1974 39-43.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4 Koło i punkty kratowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4.1. *Ile punktów kratowych leży wewnątrz koła o promieniu* $13/2$ *i środku w punkcie* $(0,0)$*?* Odp. 137. ([Kw] 5/1976 47).

9.4.2 (H. Steinhaus). *Dla dowolnej liczby naturalnej* n *istnieje na płaszczyźnie koło zawierające wewnątrz dokładnie* n *punktów kratowych.* ([Mat] 4-6/1958 67, [S59] 462, [S59a] 38).

W. Środkiem takiego koła może być punkt $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$. Każde dwa różne punkty kratowe mają różne odległości od tego punktu. ⊠

9.4.3. *Znaleźć współrzędne* $0 \leqslant x_0 \leqslant y_0 \leqslant 1$ *środka koła o polu* 10*, zawierającego dokładnie* 10 *punktów kratowych.* Odp. $x_0 = 0$, $y_0 = 1/4$. ([Mat] 2/1973 122).

9.4.4. *Niech* $b(n)$ *oznacza średnicę największego koła zawierającego wewnątrz dokładnie* n *punktów kratowych. Znaleźć* $b(n)$ *dla* $n = 0, 1, \ldots, 5$. ([Mat] 4-6/1958 68).

O. $b(0) = \sqrt{2}$, $b(1) = 2$, $b(2) = \sqrt{5}$, $b(3) = 5\sqrt{2}/3$, $b(4) = \sqrt{10}$. Nie istnieje $b(5)$. Najmniejsze przesunięcie największego koła zawierającego 4 punkty kratowe spowoduje, że do koła wpadną od razu co najmniej trzy nowe punkty kratowe. Koło zawierające 5 punktów kratowych ma średnicę mniejszą od $\sqrt{10} = b(4)$. ([Mat] 4-6/1958 68-72). ⊠

9.4.5. *Nie istnieje żaden taki punkt wymierny A, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje koło o środku w punkcie A, wewnątrz którego leży dokładnie n punktów kratowych.* ([S59a] 40).

9.4.6. *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje na płaszczyźnie koło o środku w punkcie wymiernym zawierające wewnątrz dokładnie n punktów kratowych.* ([S59a] 41).

9.4.7. *Liczba punktów kratowych leżących w kole $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, gdzie $r > 0$, jest równa*

$$1 + 4[r] - 4[s]^2 + 8 \sum_{k \leqslant s} \left[\sqrt{r^2 - k}\right],$$

gdzie $s = r/\sqrt{2}$. ([Wino] 33).

9.4.8. *Liczba punktów kratowych leżących wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = n$ nie jest mniejsza od liczby $3(n-1)^2$.* ([Fom] 26/64).

9.4.9. *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje na płaszczyźnie okrąg, na którym leży dokładnie n punktów kratowych.* ([S59a] 41, [Brok] 14).

R. Jeśli $n = 2k + 1$, to własność tę ma okrąg o środku $(\frac{1}{3}, 0)$ i promieniu $\frac{5^k}{3}$. Jeśli $n = 2k$, to własność taką ma okrąg o środku $(\frac{1}{2}, 0)$ i promieniu $\frac{5^r}{2}$, gdzie $r = \frac{k-1}{2}$. ⊠

9.4.10. *Liczbą punktów kratowych leżących na danym okręgu o środku w punkcie kratowym jest podzielna przez 4.* ([S59a] 44).

9.4.11. *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje kula posiadająca wewnątrz dokładnie n punktów kratowych.* ([S59a] 42, [Brok] 15).

W. Środkiem takiej kuli może być punkt $A = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3})$. Każde dwa różne punkty kratowe mają różne odległości od punktu A. ⊠

9.4.12 (W. Mnich)**.** *Niech K oznacza zbiór wszystkich punktów płaszczyzny postaci*

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right), \quad \textit{gdzie} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Dla każdej liczby naturalnej n istnieje koło, wewnątrz którego znajduje się dokładnie n punktów zbioru K. ([Mat] 3/1977 185).

9.4.13 (W. Mnich)**.** *Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą parami różnymi (niekoniecznie kratowymi) punktami płaszczyzny. Wykazać, że jeśli $1 \leqslant k < n$, to istnieje koło zawierające w swym wnętrzu dokładnie k spośród danych punktów.* ([Dlt] 12/1975).

D. Dane punkty wyznaczają $\frac{1}{2}n(n-1)$ odcinków. Odcinki te mają $\frac{1}{2}n(n-1)$ symetralnych. Istnieje na płaszczyźnie taki punkt X, który nie należy do żadnej z tych symetralnych. Odległości punktu X od danych punków są więc parami różne. Zmieniając ewentualnie numerację możemy założyć, że

$$XA_1 < XA_2 < \cdots < XA_n.$$

Niech r będzie dowolną liczbą rzeczywistą taką, że $XA_k < r < XA_{k+1}$. Wtedy koło o środku w X i promieniu r spełnia żądaną własność. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.5 Punkty wymierne na okręgu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że dany punkt jest *wymierny*, jeśli wszystkie jego współrzędne są liczbami wymiernymi.

9.5.1. *Na okręgu $x^2 + y^2 = 3$ nie leży żaden punkt wymierny.* ([S59a] 48).

9.5.2. *Na okręgu $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$ leży dokładnie jeden punkt wymierny. Punktem tym jest $(0, 0)$.* ([S59a] 48).

9.5.3. *Na okręgu $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 3$ leżą dokładnie dwa punkty wymierne. Są to punkty $(1, 0)$, $(-1, 0)$.* ([S59a] 48).

9.5.4. *Jeżeli jedna ze współrzędnych środka okręgu na płaszczyźnie jest niewymierna, to na okręgu tym leżą co najwyżej dwa punkty wymierne.* ([Dlt] 7/1976).

9.5.5. *Jeśli na danym okręgu leżą co najmniej trzy punkty wymierne, to środkiem tego okręgu jest punkt wymierny i kwadrat promienia jest liczbą wymierną.* ([S59a] 49).

9.5.6. *Jeśli dany okrąg ma co najmniej trzy punkty wymierne, to ma ich nieskończenie wiele.* ([S59a] 49).

9.5.7. *Na okręgu jednostkowym można znaleźć nieskończony zbiór takich punktów, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami jest liczbą wymierną.* ([K-kw]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.6 Różne fakty i zadania o punktach kratowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.6.1 (Minkowski)**.** *Jeśli centralno-symetryczna figura na płaszczyźnie ma pole > 4 i zawiera punkt kratowy $(0, 0)$, to zawiera jeszcze co najmniej jeden inny punkt kratowy.* ([K-kw]).

9.6.2. *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to*

$$\sum_{a \leqslant k \leqslant b} [f(k)]$$

jest liczbą punktów kratowych leżących w obszarze

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leqslant x \leqslant y,\ 0 < y \leqslant f(x)\Big\}. \quad \text{([Wino] 32).}$$

9.6.3. *Liczba punktów kratowych obszaru*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0,\ xy \leqslant n\}$$

jest równa $2 \sum_{k \leqslant \sqrt{n}} [n/k] - \left[\sqrt{n}\right]^2$. ([Wino] 33).

9.6.4. *Liczba punktów kratowych obszaru płaszczyzny ograniczonego parabolą* $y = x^2$ *i prostą* $y = n^2$ *jest równa*

$$\frac{1}{3}(4n^3 + 5n + 3).$$

([Mat] 1/1957 70).

9.6.5. *Ile jest takich par* (m, n) *liczb naturalnych, że*

$$49 \mid m^2 + n^2 \quad \textit{oraz} \quad m, n \leqslant 1000\,?$$

Odp. $\frac{1}{2}(142^2 - 142) + 142 = 10153$. ([Mat] 1/1950 61, [GaT] 13/40).

9.6.6. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Ile jest par* (a, b) *liczb naturalnych takich, że*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = n\,?$$

Odp. $n - 1$. ([Bryn] 1.2).

9.6.7. *Nie istnieje żadna taka para* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *że*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1995}.$$

([Bedn] 175).

9.6.8. *Ile jest par* (m, n) *liczb naturalnych takich, że*

$$\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$$

oraz $m, n \leqslant 1000$*?* Odp. 1706. ([Fom] 20/90).

9.6.9. *Ile jest par* (x, y) *liczb całkowitych takich, że*

$$|x| + |y| < 100\,?$$

Odp. 19801. ([GaT] 15/48).

9.6.10. *Jeśli hiperbola*

$$\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{m} = 1,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, *przechodzi przez punkt kratowy, to przechodzi przez nieskończenie wiele punktów kratowych.* ([Mat] 2/1994 117).

9.6.11. *Jeśli wierzchołki sześcianu są punktami kratowymi, to długość krawędzi tego sześcianu jest liczbą naturalną.* ([Mat] 5/1992 303).

★ J. Brokos, *Izometrie płaszczyzny zachowujące zbiór wszystkich punktów kratowych*, [Brok] 39-52.

10 Trójkąt

Dla danego trójkąta ABC, czyli trójkąta o wierzchołkach A, B i C, stosować będziemy następujące standardowe oznaczenia:

$$\begin{aligned}
a, b, c &= \text{długości boków leżących odpowiednio naprzeciw wierzchołków } A,\ B,\ C,\\
\alpha, \beta, \gamma &= \text{miary kątów wewnętrznych odpowiednio przy wierzchołkach } A,\ B,\ C,\\
p &= \tfrac{1}{2}(a+b+c),\\
r &= \text{promień okręgu wpisanego},\\
R &= \text{promień okręgu opisanego},\\
S &= \text{pole},\\
h_a, h_b, h_c &= \text{długości wysokości odpowiednio dla boków } a,\ b,\ c,\\
m_a, m_b, m_c &= \text{długości środkowych odpowiednio dla boków } a,\ b,\ c,\\
d_a, d_b, d_c &= \text{długości dwusiecznych odpowiednio dla boków } a,\ b,\ c,\\
u_a, u_b, u_c &= \text{liczby odpowiednio równe } p-a, p-b, p-c,\\
\rho_a, \rho_b, \rho_c &= \text{promienie okręgów dopisanych odpowiednio dla boków } a,\ b,\ c.
\end{aligned}$$

10.0.12. *Dla każdego trójkąta zachodzą następujące wielomianowe równości.*

(1) $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2px^2 + (p^2+r^2+4Rr)x - 4Rrp.$

(2) $(x-u_a)(x-u_b)(x-u_c) = x^3 - px^2 + r(4R+r)x - pr^2.$

(3) $(x-h_a)(x-h_b)(x-h_c) = x^3 - \dfrac{p^2+r^2+4Rr}{2R}x^2 + \dfrac{2p^2r}{R}x - \dfrac{2p^2r^2}{R}.$

(4) $(x-\rho_a)(x-\rho_b)(x-\rho_c) = x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r.$

(5) $(x-\sin\alpha)(x-\sin\beta)(x-\sin\gamma) = x^3 - \dfrac{p}{R}x^2 + \dfrac{p^2+r^2+4Rr}{8R^2}x - \dfrac{rp}{2R^2}.$

(6) $(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)(x-\cos\gamma) = x^3 - \dfrac{r+R}{R}x^2 + \dfrac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}x - \dfrac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}.$

Niektóre z tych równości udowodnimy. Podamy również inne tego rodzaju równości. Często korzystać będziemy z następującego lematu.

10.0.13. *Załóżmy, że dana jest wielomianowa równość*

$$(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) = x^3 - ux^2 + vx - w,$$

w której x jest zmienną oraz z_1, z_2, z_3, u, v, w są liczbami. Zachodzą wówczas następujące *równości.*

$$z_1+z_2+z_3=u, \qquad \frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}=\frac{u}{w},$$
$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=v, \qquad z_1^3+z_2^3+z_3^3=u^3-3uv+3w,$$
$$z_1z_2z_3=w, \qquad (z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)=uv-w,$$
$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=u^2-2v,$$
$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{v}{w}, \qquad \frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_3+z_1}{z_2}=\frac{uv-3w}{w}.$$

Pisać będziemy "trójkąt o bokach a,b,c" zamiast "trójkąt o bokach długości a,b,c". To samo dla wyskości, środkowych, dwusiecznych, itp. Opuszczać będziemy słowa dotyczące "długości" lub "miar" gdy mowa będzie o kątach.

Pewne klasyczne fakty, które tu przypomnimy, nie będą miały żadnych odnośników do źródeł i literatury. Pochodzą one głównie ze starych zapisków autora z lat szkolnych i studenckich.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.1 Boki trójkąta

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zanotujmy najpierw dwa podstawowe twierdzenia.

10.1.1 (Twierdzenie sinusów). $a=2R\sin\alpha, \quad b=2R\sin\beta, \quad c=2R\sin\gamma.$

10.1.2. *Liczby*

$$u_a=p-a, \quad u_b=p-b, \quad u_c=p-c$$

są odległościami odpowiednio wierzchołków A, B i C od najbliższych punktów styczności okręgu wpisanego. Zachodzą równości:

$$u_a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad u_b=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \quad u_c=r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

D. Niech A', B', C' będą punktami styczności okręgu wpisanego z odpowiednimi bokami trójkąta. Oznaczmy: $x=|AB'|=|AC'|$, $y=|BC'|=|BA'|$, $z=|CA'|=|CB'|$. Wtedy:

$$x+y=c, \quad y+z=a, \quad z+x=b, \quad x+y+z=2p.$$

Stąd mamy kolejno:

$$a+b=(x+y)+2z=c+2z,$$
$$z=\frac{a+b-c}{2}=\frac{(a+b+c)-2c}{2}=p-c.$$

Zatem $z=p-c$ i w podobny sposób otrzymujemy równości $x=p-a$ oraz $y=p-b$. Stód natychmiast wynikają podane w tym twierdzeniu równości z cotangensami. ⊠

Korzystając z powyższych dwóch twierdzeń otrzymujemy:

10.1.3. *Boki a,b,c są pierwiastkami wielomianu*

$$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4Rrp.$$

D. Z twierdzeń 10.1.1 i 10.1.2 wynika, że

$$a = 2R\frac{2t}{1+t^2}$$

oraz $p - a = \dfrac{r}{t}$, gdzie $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Eliminując z tych dwóch równości liczbę t otrzymujemy równość

$$a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0;$$

więc a jest pierwiastkiem rozpatrywanego wielomianu. Podobnie postępujemy z bokami b i c. ⊠

Stąd już łatwo można wywnioskować poniższe użyteczne twierdzenie.

10.1.4. *Dla każdego trójkąta zachodzi wielomianowa równość:*

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp.$$

D. Jeśli liczby a, b, c są parami różne, to równość ta wynika natychmiast z 10.1.3 i twierdzenia Bezouta. Łatwo sprwadzić, że to jest również prawdą w przypadku gdy co najmniej dwie z liczba a, b, c są równe. ⊠

10.1.5. *Następujące równości wynikają z* 10.1.4 *i* 10.0.13.

(1) $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$,

(2) $abc = 4Rrp = 4SR$,

(3) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$,

(4) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rpr}$,

(5) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{2Rr}$,

(6) $a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$, ([MC] 17(2)(2004) s.19),

(7) $(a+b)(b+c)(c+a) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr)$,

(8) $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}$.

10.1.6. *Jeśli* $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} = p$, *to trójkąt jest równoboczny.* ([Crux] 2002 s.346).

10.1.7. $\alpha = 2\beta \iff a^2 = b^2 + bc$. ([OM] Czechosłowacja 1972/1973).

10.1.8. *Jeśli a, b, c są bokami trójkąta, to istnieje trójkąt o bokach*

$$\frac{a}{a+1}, \quad \frac{b}{b+1} \quad \frac{c}{c+1}.$$

([OM] Czechosłowacja 1971/1972).

10.1.9. *Jeśli a, b, c są bokami trójkąta, to $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ także są bokami trójkąta.* ([Tri] 67).

10.1.10. *Niech $a, b, c > 0$. Jeśli $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$, to istnieje trójkąt o bokach a, b, c.* ([OM] Chiny 1988).

10.1.11. *Niech $n > 3$ oraz $a_1, \dots, a_n > 0$. Jeśli*

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4+\cdots+a_n^4),$$

to każde trzy liczby spośród $a_1, \dots, a_n$ są długościami boków trójkąta. ([OM] Chiny 1988).

★ Różne nierówności dla boków trójkąta i różne nierówności geometryczne znajdują się w [N13].

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2 Liczby $u_a = p - a$, $u_b = p - b$ i $u_c = p - c$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Już wiemy (patrz 10.1.2), że liczby u_a, u_b i u_c są odległościami wierzchołków A, B i C od odpowiednich punktów styczności okręgu wpisanego. Spójrzmy jeszcze raz na wielomianową równość 10.1.4. Zmienną x zastąpmy w tej równości wielomianem $p-x$. Otrzymamy wówczas następujące twierdzenie.

10.2.1. *Dla każdego trójkąta zachodzi wielomianowa równość:*

$$(x-u_a)(x-u_b)(x-u_c) = x^3 - px^2 + r(4R+r)x - pr^2.$$

10.2.2. *Następujące równości wynikają z* 10.2.1 *i* 10.0.13*:*

(1) $u_a + u_b + u_c = p$,

(2) $u_au_b + u_bu_c + u_cu_a = r(4R+r)$,

(3) $u_au_bu_c = pr^2$,

(4) $u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 = p^2 - 2r(4R+r)$,

(5) $\dfrac{1}{u_a} + \dfrac{1}{u_b} + \dfrac{1}{u_c} = \dfrac{4R+r}{pr}$,

(6) $\dfrac{1}{u_au_b} + \dfrac{1}{u_bu_c} + \dfrac{1}{u_cu_a} = \dfrac{1}{r^2}$,

(7) $u_a^3 + u_b^3 + u_c^3 = p(p^2 - 12Rr)$,

(8) $(u_a+u_b)(u_b+u_c)(u_c+u_a) = 4Rrp$,

(9) $\dfrac{a}{u_a} + \dfrac{b}{u_b} + \dfrac{c}{u_c} = \dfrac{u_a+u_b}{u_c} + \dfrac{u_b+u_c}{u_a} + \dfrac{u_c+u_a}{u_b} = \dfrac{4R-2r}{r}$.

10.2.3. $\dfrac{1}{u_a^2} + \dfrac{1}{u_b^2} + \dfrac{1}{u_c^2} \geqslant \dfrac{1}{r^2}$. ([Putn] 1966, [MOc] 2004 276).

Z faktu 10.2.1 wynika następujący znany wzór na pole trójkąta.

10.2.4 (Wzór Herona)**.** *Zawsze zachodzi równość $pu_au_bu_c = S^2$, tzn.*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

D. Iloczyn $u_au_bu_c$ jest, na mocy 10.2.1, równy pr^2. Ale $pr = S$, więc $pu_au_bu_c = p^2r^2 = S^2$. ⊠

★ S. H. Kung, *Another elementary proof of Heron's formula*, [MM] 65(5)(1992) 337-338.
T. Maekawa, *Two intuitive proofs of Heron's formula*, [MG] 88(513)(2004) 546-548.
C. H. Raifaizen, *A simpler proof of Heron's formula*, [MM] 44(1)(1971) 27-28.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3 Środkowe, dwusieczne i wysokości

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3.1. *Dla każdego trójkąta zachodzą równości:*

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2), \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2), \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2).$$

(Wynika to na przykład z 10.6.1).

10.3.2. $\frac{3}{4} < \frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c} < 1$. ([MOc] 2006 z.437).

10.3.3. *Na płaszczyźnie dane są odcinki u, v, w. Jeśli istnieje taki trójkąt, że*

$$(m_a, m_b, m_c) = (u, v, w),$$

to trójkąt ten można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. ([Bach] 20).

10.3.4. *Dla każdego trójkąta zachodzą równości:*

$$d_a^2(b+c)^2 = bc((b+c)^2-a^2), \quad d_b^2(c+a)^2 = ca((c+a)^2-b^2), \quad d_c^2(a+b)^2 = ab((a+b)^2-c^2).$$

(Wynika to na przykład z 10.6.1).

10.3.5. *Na płaszczyźnie dane są odcinki u, v, w. Jeśli istnieje taki trójkąt, że $(d_a, d_b, d_c) = (u, v, w)$, to trójkąta tego nie można w ogólności skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.* ([Bach] 23).

10.3.6. *Na płaszczyźnie dany jest odcinek u będący dwusieczną d_a i dane są jeszcze dwa odcinki v i w. Wówczas trójkąt ABC można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki (przy założeniu, że taki trójkąt istnieje) dokładnie wtedy, gdy (u, v, w) jest jedną z następujących 11 trójek:*

$$\begin{gathered}(d_a, h_a, a),\ (d_a, h_a, m_a),\ (d_a, h_a, r),\ (d_a, h_a, R),\ (d_a, m_a, a),\\ (d_a, m_a, R),\ (d_a, a, R),\ (d_a, b, c),\ (d_a, b, h_c)\ \textit{lub}\ (d_a, c, h_b),\\ (d_a, h_b, h_c),\ (d_a, h_a, b)\ \textit{lub}\ (d_a, h_a, c).\end{gathered}$$

Pozostałe przypadki tego typu nie są w ogólności konstruowalne. ([Bach] 23).

Przypomnijmy, że przez h_a, b_b i h_c oznaczamy długości odpowiednich wysokości.

10.3.7. *Dla każdego trójkąta zachodzi wielomianowa równość:*

$$(x-h_a)(x-h_b)(x-h_c) = x^3 - \frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}x^2 + \frac{2p^2r}{R}x - \frac{2p^2r^2}{R}.$$

D. Wiadomo, że $ah_a = 2S = 2pr$, czyli $a = 2pr/h_a$. Wystarczy zatem w równości wielomianowej 10.1.4 wstawić $2pr/x$ w miejsce x. ⊠

10.3.8. *Następujące równości wynikają z* 10.3.7 *i* 10.0.13*:*

(1) $h_a + h_b + h_c = \dfrac{1}{2R}(p^2 + r^2 + 4Rr),$

(2) $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \dfrac{2p^2 r}{R},$

(3) $h_a h_b h_c = \dfrac{2p^2 r^2}{R} = 2S^2/R,$

(4) $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \dfrac{1}{4R^2}((p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2 Rr),$

(5) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}.$ ([Zet] 18).

(6) $\dfrac{1}{h_a h_b} + \dfrac{1}{h_b h_c} + \dfrac{1}{h_c h_a} = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4p^2 r^2},$

(7) $(h_a + h_b)(h_b + h_c)(h_c + h_a) = \dfrac{p^2 r(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2},$

(8) $\dfrac{h_a + h_b}{h_c} + \dfrac{h_b + h_c}{h_a} + \dfrac{h_c + h_a}{h_b} = \dfrac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$

10.3.9. *Na płaszczyźnie dane są odcinki* u, v, w*. Jeśli istnieje taki trójkąt, że* $(h_a, h_b, h_c) = (u, v, w)$*, to trójkąt ten można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.* ([Bach] 20).

10.3.10. *Nie istnieje trójkąt o wysokościach* $4, 7, 10$. ([UsaT]).

10.3.11. *Nie istnieje trójkąt o wysokościach* $2, 3, 6$. ([B-nu] z.17 s.70).

10.3.12. *Trójkąt o naturalnych bokach* a, b, c *ma jedną z wysokości równą sumie dwóch pozostałych wysokości. Wykazać, że* $a^2 + b^2 + c^2$ *jest liczbą kwadratową.* ([OM] Leningrad 1991).

10.3.13. *Jeśli w danym trójkącie dwie środkowe lub dwie wysokości lub dwie dwusieczne mają tę samą długość, to trójkąt ten jest równoramienny.*

U. Różne interesujące dowody tego faktu przedstawił Michał Krych podczas odczytu wygłoszonego w 2010 roku w Białymstoku. ⊠

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
10.4 Promienie okręgów dopisanych
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.4.1. *Dla każdego trójkąta zachodzi wielomianowa równość:*

$$(x-\rho_a)(x-\rho_b)(x-\rho_c) = x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r.$$

10.4.2. *Następujące równości wynikają z* 10.4.1 *i* 10.0.13*:*

(1) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4R + r$,

(2) $\rho_a\rho_b + \rho_b\rho_c + \rho_c\rho_a = p^2$,

(3) $\rho_a\rho_b\rho_c = p^2r$,

(4) $r\rho_a\rho_b\rho_c = p^2r^2 = S^2$,

(5) $\rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$,

(6) $\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c} = \dfrac{1}{r}$, ([Zet] 18),

(7) $\dfrac{1}{\rho_a\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_b\rho_c} + \dfrac{1}{\rho_c\rho_a} = \dfrac{4R+r}{p^2r}$,

(8) $\rho_a^3 + \rho_b^3 + \rho_c^3 = 64R^3 + 48R^2r + 12Rr^2 + r^3 - 12p^2R$,

(9) $(\rho_a+\rho_b)(\rho_b+\rho_c)(\rho_c+\rho_a) = 4p^2R$,

(10) $4R(\rho_a\rho_b + \rho_b\rho_c + \rho_c\rho_a) = (\rho_a+\rho_b)(\rho_b+\rho_c)(\rho_c+\rho_a)$,

(11) $\dfrac{\rho_a+\rho_b}{\rho_c} + \dfrac{\rho_b+\rho_c}{\rho_a} + \dfrac{\rho_c+\rho_a}{\rho_b} = \dfrac{4R-2r}{r}$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
10.5 Kąty i funkcje trygonometryczne
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.5.1. *Dla każdego trójkąta zachodzi wielomianowa równość:*

$$(x-\sin\alpha)(x-\sin\beta)(x-\sin\gamma) = x^3 - \frac{p}{R}x^2 + \frac{p^2+r^2+4Rr}{8R^2}x - \frac{rp}{2R^2}.$$

D. Wiemy, na mocy twierdzenia sinusów, że $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$. Wstawiając zatem do równości wielomianowej 10.1.4 wielomian $2Rx$ (w miejsce x) otrzymamy żądaną równość. ⊠

10.5.2. *Następujące równości wynikają z* 10.5.1 :

(1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \dfrac{p}{R}$,

(2) $\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha = \dfrac{p^2+r^2+4Rr}{8R^2}$,

(3) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\dfrac{pr}{2R^2}=\dfrac{S}{2R^2}$,

(4) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\dfrac{3p^2-r^2-4Rr}{4R^2}$,

(5) $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}=\dfrac{p^2+r^2+4Rr}{4rp}$,

(6) $\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\dfrac{1}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}=\dfrac{2R}{r}$,

(7) $\sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma=\dfrac{p(5p^2-3r^2)}{8R^3}$,

(8) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\gamma+\sin\alpha)=\dfrac{p(p^2+r^2)}{8R^3}$,

(9) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}+\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\gamma+\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}$,

(10) $2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$.

10.5.3. *Inne równości z sinusami:*

(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{r}{4R}$,

(2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

(3) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=1$. ([AFe]).

10.5.4. *Jeśli x,y,z są takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że*

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1,$$

to istnieje taki trójkąt, że $x=\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $y=\sin\dfrac{\beta}{2}$, $z=\sin\dfrac{\gamma}{2}$. ([AFe] 95).

10.5.5.

(1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 3\sqrt{3}/2$.

(2) $2<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, *jeśli trójkąt jest ostrokątny.*

(3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 1+\sqrt{2}$, *jeśli trójkąt jest rozwartokątny.* ([Khr2], [Khr1]).

10.5.6. *Nierówności z sinusami:*

(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\dfrac{a}{b+c}$, $\sin\dfrac{\beta}{2}\leqslant\dfrac{b}{c+a}$, $\sin\dfrac{\gamma}{2}\leqslant\dfrac{c}{a+b}$, ([AFe] 87);

(2) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\leqslant\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, ([Crux] 2001 s.140);

(3) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}\geqslant\dfrac{3}{4}$, ([AFe] 96);

(4) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$, ([Khr2], [Khr1]);

(5) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$. ([AFe] 96);

(6) $\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} \geqslant 12$, ([OM] Korea Pd. 1994).

10.5.7. *Trójkąt jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin^2(\beta/2)} + \frac{1}{\sin^2(\gamma/2)} = 12.$$

([OM] Korea Pd. 1994).

10.5.8. *Dla każdego trójkąta zachodzi wielomianowa równość:*

$$(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)(x-\cos\gamma) = x^3 - \frac{r+R}{R}x^2 + \frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}x - \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}.$$

D. (Szkic). Wiemy (patrz 10.1.1 i 10.1.2), że $p = 2R\sin\varphi + r\operatorname{ctg}(\varphi/2)$, dla każdego $\varphi \in \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Niech $x = \cos\varphi$. Wtedy (dla $x \neq 1$) mamy:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-x^2} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ctg}(\varphi/2) = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}.$$

Dla $x \neq 1$ zachodzi więc równość

$$p = \sqrt{1-x^2}\left(2R + \frac{r}{1-x}\right),$$

z której otrzymujemy żądaną równość. Przypadek $x = 1$ sprawdzamy oddzielnie. ⊠

10.5.9. *Następujące równości wynikają z* 10.5.8 *i* 10.0.13:

(1) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R}$, (Twierdzenie Carnota, [Mat] 2/2005 13-15)

(2) $\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha = \frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$,

(3) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$,

(4) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2+4Rr+6R^2-p^2}{2R^2}$,

(5) $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{p^2+r^2-4R^2}{(r+2R+p)(-r-2R+p)}$,

(6) $\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{1}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{1}{\cos\gamma\cos\alpha} = \frac{4(r+R)R}{(r+2R+p)(-r-2R+p)}$,

(7) $\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma = \frac{r^3+6Rr^2+12R^2r+4R^3-3pr^2}{4R^3}$,

(8) $(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta+\cos\gamma)(\cos\gamma+\cos\alpha) = \frac{r(p^2+r^2+2Rr)}{4R^3}$.

10.5.10. *Inne równości z cosinusami.*

(1) $p = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, ([AFe] 101).

(2) $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \frac{abc}{2R^2}$, ([AFe] 99).

(3) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, ([AFe] 97).

(4) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, ([OM] Bułgaria 1973, [OM] Korea 1994).

(5) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, ([AFe] 97).

(6) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, ([AFe] 101).

(7) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$, ([AFe] 97).

10.5.11. *Jeśli x, y, z są dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

to istnieje taki trójkąt, że $x = \cos\alpha,\ \ y = \cos\beta,\ \ z = \cos\gamma$. ([AFe] 97).

10.5.12. *Trójkąt jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = -1.$$

([OM] NRD 1974, [Pa03] s.15).

10.5.13. *Trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \frac{a+b+c}{2}.$$ ([AFe] 109).

10.5.14. *Nierówności z cosinusami.*

(1) $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$, ([Crux] 2001 45-47).

(2) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{9}{4}$, ([AFe] 96).

(3) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant 1/2$, ([Khr2], [Khr1]).

(4) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$, ([OM] Czechosłowacja 1968, [Pa03] s.19).

(5) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$, ([AFe] 96).

(6) $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \geqslant \frac{8}{3 + 2\cos\gamma}$, ([OM] Macedonia 1999).

10.5.15. *Dla każdego trójkąta zachodzą następujące wielomianowe równości.*

$$\Big(x - \operatorname{tg}(\alpha/2)\Big)\Big(x - \operatorname{tg}(\beta/2)\Big)\Big(x - \operatorname{tg}(\gamma/2)\Big) = x^3 - \frac{r+4R}{p}x^2 + x - \frac{r}{p},$$

$$\Big(x - \operatorname{ctg}(\alpha/2)\Big)\Big(x - \operatorname{ctg}(\beta/2)\Big)\Big(x - \operatorname{ctg}(\gamma/2)\Big) = x^3 - \frac{p}{r}x^2 + \frac{r+4R}{r}x - \frac{p}{r}.$$

Z powyższych równości wynikają następujące równości dotyczące tangensów i cotangensów.

10.5.16.

(1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r+4R}{p}$,

(2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$,

(3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p}$,

(4) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{16R^2+8Rr+r^2-2p^2}{p^2}$,

(5) $\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}=\frac{64R^3+48R^2r+12Rr^2+r^3-12p^2R}{p^3}$,

(6) $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4R}{p}$,

(7) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{4R-2r}{r}$.

10.5.17.

(1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{r}$,

(2) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r+4R}{r}$,

(3) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{r}$,

(4) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{p^2-8Rr-2r^2}{r^2}$,

(5) $\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{\gamma}{2}=\frac{p(p^2-12Rr)}{r^3}$,

(6) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4pR}{r^2}$,

(7) $\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\frac{4R-2r}{r}$,

(8) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

10.5.18. *Niech $x,y,z\in\mathbb{R}$. Jeśli $xy+yz+zx=1$, to istnieją takie liczby rzeczywiste α, β i γ, że $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ oraz*

$$x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\quad z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

([Ko02]).

10.5.19. *Jeśli trójkąt jest ostrokątny, to*

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

10.5.20. *Niech α, β, γ będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha + \beta < \pi$ oraz $\gamma < \pi$. Wtedy następujące dwa zdania są równoważne.*

(1) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(2) $\operatorname{ctg}(\alpha)\operatorname{ctg}(\beta) + \operatorname{ctg}(\beta)\operatorname{ctg}(\gamma) + \operatorname{ctg}(\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha) = 1$. ([Mon] 2/2005 140).

10.5.21. $\dfrac{a-c}{a+b} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$. ([AFe] 108).

10.5.22. *Jeśli trójkąt jest ostrokątny, to*

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\sqrt{3}.$$

([AFe] 94).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.6 Odległości punktu od wierzchołków

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.6.1 (Stewart). *Jeśli punkt D leży na boku AB trójkąta ABC, to*

$$|CD|^2 \cdot |AB| = |BC|^2 \cdot |AD| + |AC|^2 \cdot |DB| - |AB| \cdot |AD| \cdot |DB|.$$

([Hada] III.3, [Pa03] s.227).

10.6.2. *Niech ABC będzie trójkątem o polu równym 1 i niech P będzie punktem wewnętrznym lub brzegowym tego trójkąta. Wtedy*

$$|PA| + |PB| + |PC| \geqslant 2\sqrt[4]{3}.$$

([Mon] 111(8)(2004) z.10965).

10.6.3 (Twierdzenie Carnota). *W każdym trójkącie*

$$OM_a + OM_b + OM_c = R + r,$$

gdzie O jest środkiem okręgu opisanego, M_a, M_b, M_c są środkami boków. ([Mat] 2/2005, 13-15).

U. Trygonometryczna wersja tego twierdzenia:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}.$$

Klasyczne twierdzenie cosinusów nazywane jest również twierdzeniem Carnota. ⊠

★ P. Kubit, *Twierdzenie Carnota*, [Mat] 2/2005 13-15.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.7 Pole trójkąta

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Istnieją różne wzory na pole trójkąta. W poniższym zestawie tych wzorów oznaczenia są takie jak na początku tego rozdziału. Przypomnijmy, że pole trójkąta oznaczamy przez S.

10.7.1. *Zachodzą następujące równości.*

(1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$

(2) $S = pr.$

(3) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta.$

(4) $S = \frac{abc}{4R}$, (10.1.5).

(5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, (Wzór Herona, 10.2.4).

(6) $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}$, ([Bach] 19).

(7) $S = \sqrt{\frac{Rh_ah_bh_c}{2}}$, (10.3.8).

(8) $S = \sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c}$, (10.4.2).

(9) $S = r\sqrt{\rho_a\rho_b + \rho_b\rho_c + \rho_c\rho_a}$, (10.4.2).

(10) $S = 2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$, (10.5.2).

10.7.2. *Niech S będzie polem trójkąta o bokach a, b, c i niech T będzie polem trójkąta o bokach $a+b$, $b+c$ i $c+a$. Wtedy*

$$T \geqslant 4S.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c$. ([OM] Czechy-Słowacja 2002).

10.7.3. $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + \frac{2}{x+y+z}\left(\frac{x^2-yz}{x}a^2 + \frac{y^2-zx}{y}b^2 + +\frac{z^2-xy}{z}c^2\right),$

dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z. (C. Pohoata, [Mon] 8/2011 748-749).

10.7.4. $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$. (R. Weitzenböck 1919; wynika z 10.7.3 dla $x = y = z$).

10.7.5. $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$

(P. von Finstler, H. Hadwiger 1937; wynika z 10.7.3 dla $x = a, y = b, z = c$).

★ P. von Finsler, H. Hadwiger, *Einige Relationen im Dreieck*, Comentarii Mathematici Helvetici, 10(1937) 316-326.

R. Weitzenböck, *Über eine Ungleichung in der Dreieckgeometrie*, [MatZ] 5(1919) 137-146.

10.7.6. *Pole trójkąta na płaszczyźnie* $\mathbb{R}^2$, *o wierzchołkach* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *i* (x_3, y_3) *jest równe*

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

10.7.7. *Mówimy, że punkt* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *jest wymierny, jeśli liczby* a *i* b *są wymierne. Pole trójkąta na płaszczyźnie* $\mathbb{R}^2$, *o wierzchołkach w punktach wymiernych jest liczbą wymierną.* (Wynika z 10.7.6).

10.7.8. *Podwojone pole trójkąta, na płaszczyźnie* $\mathbb{R}^2$, *o wierzchołkach w punktach całkowitych* (*tzn. kratowych*) *jest liczbą naturalną.* (Wynika z 10.7.6).

10.7.9. *Niech* $n \geqslant 3$. *Czy istnieje na płaszczyźnie* n *parami różnych takich punktów, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma jest liczbą niewymierną, a pole dowolnego trójkąta o wierzchołkach w danych punktach jest liczbą wymierną ?* ([Dlt] 4/2004 M1057).

D. Takie punkty istnieją. Niech $A_i = (i,\ i^2)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas każda odległość $d(A_i, A_j)$, gdzie $i < j$, jest równa

$$(j - i)\sqrt{1 + (i + j)^2},$$

czyli jest liczbą niewymierną. Natomiast pole każdego trójkąta, o wierzchołkach w tych punktach, jest liczbą wymierną (patrz 10.7.7). Pole trójkąta o wierzchołkach A_i, A_j, A_k jest w tym przypadku równe $\frac{1}{2}|(i - j)(j - k)(k - i)|$. ⊠

10.7.10. *Pole trójkąta w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *o wierzchołkach* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) *i* (x_3, y_3, z_3), *jest równe*

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & x_1 - x_3 \\ z_2 - z_3 & x_2 - x_3 \end{vmatrix}^2}.$$

10.7.11. *Pole trójkąta w* $\mathbb{R}^3$, *o wierzchołkach w punktach wymiernych nie musi być liczbą wymierną. Na przykład pole trójkąta o wierzchołkach* $(0, 0, 0), (1, 1, 1)$ *i* $(1, 1, 2)$ *jest równe* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.8 Trójkąty Herona

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Trójkąt Herona, to taki trójkąt, którego pole oraz długości wszystkich boków są liczbami wymiernymi. Tego rodzaju trójkąty nazywane są również *trójkątami wymiernymi* ([Dic2] 191).

10.8.1 (Heron). *Pole trójkąta o bokach* $(13, 14, 15)$ *jest równe* 84. ([Dic2] 191).

10.8.2. *Pole trójkąta* $(3, 4, 5)$ *jest równe* 6. *Każdy trójkąt pitagorejski jest trójkątem Herona. Pole trójkąta pitagorejskiego jest zawsze liczbą naturalną podzielną przez* 6.

10.8.3. *Niech d będzie dodatnią liczbą wymierną. Następujące warunki są równoważne.*

(*a*) *Istnieje trójkąt prostokątny o wymiernych bokach i polu d.*

(*b*) *Istnieją trzy takie liczby wymierne a, b, c, że a^2, b^2, c^2 jest postępem arytmetycznym o różnicy d.*

(*c*) *Istnieją punkty wymierne na krzywej*

$$y^2 = x^3 - d^2 x$$

różne od $(0,0)$ *i* $(\pm d, 0)$.

([K-ks] 20, E05/02 10).

U. Wynika to z elementarnych faktów o krzywych eliptycznych (patrz, na przykład, [N-9]). Stąd wynika np., że nie ma trójkąta prostokątnego o wymiernych bokach i polu równym 1. ⊠

10.8.4. *Czy z tego, że istnieje trójkąt o wymiernych bokach i wymiernym polu d wynika, że istnieje trójkąt prostokątny o wymiernych bokach i polu d ?*

10.8.5. *Jeśli istnieje trójkąt o wymiernych bokach i polu równym danej liczbie d (niekoniecznie wymiernej), to takich trójkątów istnieje nieskończenie wiele.* ([K-ks] 12, E05/02 16).

10.8.6 (Wolstenholme 1870)**.** *Jeśli a jest dodatnią liczbą wymierną i*

$$b = \frac{a(3a^2 - 16)}{2(16 + 3a^2)},$$

to trójkąt $(a - b, a, a + b)$ jest wymierny i jego pole wynosi $a + 2b$. Boki i pole tworzą więc ciąg arytmetyczny. ([Dic2] 196).

10.8.7 (Rath 1874)**.** *Przykłady trójkątów Herona z bokami tworzącymi ciągi arytmetyczne:*

$$(3,4,5),\ (13,14,15),\ (15,26,37),\ (15,28,41),\ (25,38,51),\ (61,74,87).$$

([Dic2] 196).

10.8.8. *Przykłady trójkątów Herona, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi:*

$$(3,4,5),\ (13,14,15),\ (51,52,53),\ (193,194,195),\ (723,724,725),\ (2701,2702,2703).$$

Pola są odpowiednio równe: 6, 84, 2370, $16\,296$, $226\,974$, $3\,161\,340$.

10.8.9. *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów Herona, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi i pole jest liczbą naturalną.* ([Mon] 24(1917) 295, [S50] 259-261).

D. Sposób I. ([MM] 52(1)(1979) 53). Pole trójkąta o bokach $a-1$, a, $a+1$ jest, na mocy wzoru Herona, równe

$$\frac{a}{4}\sqrt{3(a^2-4)}.$$

Rozpatrzmy ciąg (a_n) określony następująco:

$$a_1 = 14, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Wykażemy, że dla każdego n liczba $b_n = \frac{1}{4}\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$ jest naturalna. Dla $n = 1$ mamy:

$$b_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3 \cdot 192} = 6.$$

Niech $n \geqslant 1$ i załóżmy, że $b_n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}\sqrt{3(a_{n+1}^2 - 4)} = \frac{1}{4}\sqrt{3\left((a_n^2 - 2) - 4\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{3\left(a_n^4 - 4a_n^2\right)} = \frac{a_n}{4}\sqrt{3(a_n r - 4)} = a_n b_n,$$

a więc wtedy b_{n+1} jest również liczbą naturalną. Każde więc b_n jest (na mocy indukcji) liczbą naturalną. Pole każdego trójkąta o bokach $a_n - 1,\ a_n,\ a_n + 1$ jest zatem liczbą naturalną i takich trójkątów mamy nieskończenie wiele.

Sposób II. ([Mon] 24(6)(1917) 295). Niech

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 4 \quad \text{oraz} \quad c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n$$

dla $n \geqslant 0$. Łatwo sprawdzić, że każdy trójkąt o bokach $c_n - 1,\ c_n,\ c_n + 1$ spełnia żądane warunki. ⊠

Za pomocą rozwiązań równania Pella

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

można opisać wszystkie trójkąty Herona z kolejnymi liczbami naturalnymi. W [N14] znajdziemy dowód następującego twierdzenia.

10.8.10. *Długości $a \leqslant b \leqslant c$, boków trójkąta, są kolejnymi liczbami naturalnymi i pole jest liczbą naturalną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a = 2x - 1, \quad b = 2x, \quad c = 2x + 1,$$

gdzie x jest liczbą naturalną sdpełniającą równość

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

dla pewnego naturalnego y. Wtedy pole jest równe $3xy$. ([S50] 259-261).

10.8.11. *Niech $a \leqslant b \leqslant c$ będą bokami trójkąta Herona. Jeśli wszystkie liczby a, b, c są potęgami liczb pierwszych, to*

$$(a,b,c) = (3,4,5) \quad \textit{lub} \quad (a,b,c) = \Big(4(F_{n-1} - 1), F_n, F_n\Big),$$

dla pewnego $n \geqslant 1$, gdzie $F_n = 2^{2^n} + 1$ jest liczbą pierwszą Fermata. ([Mon] 1/2003 46-49).

10.8.12. *Niech $p \geqslant 3$ będzie liczbą pierwszą. Istnieje trójkąt o naturalnych bokach, naturalnym polu i obwodzie równym $4p$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$p \equiv 1 \pmod 8 \quad \textit{lub} \quad p \equiv 3 \pmod 8.$$

Taki trójkąt istnieje wtedy dokładnie jeden i jego boki są postaci

$$p, \quad p + x^2, \quad 2p - x^2.$$

([Crux] 1999 s.185).

10.8.13. *Jeśli obwód trójkąta o całkowitych bokach jest liczbą nieparzystą, to jego pole jest liczbą niewymierną.* ([Mat] z.1459).

10.8.14. *Mówić będziemy, że trójkąt T jest* specjalnym trójkątem Herona *jeśli jego boki są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi oraz pole jest kwadratową liczbą naturalną.*

(1) *Trójkąt $T = (9, 10, 17)$ jest specjalnym trójkątem Herona. Jego pole jest równe* 36.

(2) *Trójkąt pitagorejski nie jest specjalnym trójkątem Herona.*

(3) *Istnieje nieskończenie wiele specjalnych trójkątów Herona.*

(4) *Niech $a_n = 20n^4 + 4n^2 + 1$, $b_n = 8n^6 - 4n^4 - 2n^2 + 1$, $c_n = 8n^6 + 8n^4 + 10n^2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy trójkąt (a_n, b_n, c_n) jest specjalnym trójkątem Herona o polu równym*

$$\Big((2n)(2n^2 - 1)(2n^2 + 1)\Big)^2.$$

(5) *Niech $a_1 = 9$, $a_{n+1} = (2a_n - 1)^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

$$\Big(a_{n+1},\ (a_n - 1)a_{n+1} + 1,\ a_n a_{n+1} - 1\Big)$$

jest specjalnym trójkątem Herona o polu równym liczbie kwadratowej $a_{n+1}a_n(2a_n - 2)$.

(6) *Trójkąty $(3, 25, 26)$ i $(9, 10, 17)$ są specjalnymi trójkątami Herona o tym samym polu równym* 36.

(7) *Trójkąty*

$$(113, 3137, 3150), \quad (800, 1241, 2009), \quad (245, 1443, 1448)$$

są specjalnymi trójkątami Herona o tym samym polu równym 420^2.

([Mon] 98(8)(1991) 772-774 z.6628).

★ A. Bényi, *A Heron-type formula for the triangle*, [MG] 87(509)(2003) 324-326.
Ch. J. Bradley, *Heron triangles and touching circles*, [MG] 87(508)(2003) 36-41.
L. E. Ellis, *Heron triangles*, [MG] 506(2002) 307-310.
N. J. Fine, *On rational triangles*, [Mon] 83(1976) 517-521.
R. K. Guy, *Triangles with integer edges, medians and area*, [Gy04] 290-293.
J. H. Jordan, R. Walch, R. J. Wisner, *Triangles with integer sides*, [Mon] 1979 686-689.
F. Luca, *Fermat primes and Heron triangles with prime power sides*, [Mon] 1/2003 46-49.
D. W. Mitchell, *Heron triangles with $\angle B = 2\angle A$*, [MG] 91(521)(2007) 326-328.
J. Sandor, *On Heron triangles III*, [Sand] 42-52.
K. R. S. Sastry, *A Heron difference*, [Crux] 2001 22-26.
K. R. S. Sastry, *If (a, b, c) is Heron, can $(s - a, s - b, s - c)$ also be Heron?*, [Crux] 2002 23-27.
G. Wain, W. W. Wilson, $13, 14, 14$*: an investigation*, [MG] 71(455)(1987) 32-37.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.9 Różne fakty i zadania o trójkątach

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.9.1. *Każdy trójkąt można rozciąć na trójkąty równoramienne.* ([B-nu] z.45 s.73).

10.9.2 (Twierdzenie Napoleona)**.** *Jeśli na bokach dowolnego trójkąta zbudujemy trójkąty równoboczne, to środki tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny.* ([Dlt] 6/2004, 6-7).

10.9.3. *W trójkącie równobocznym o boku* 4 *umieszczono* 17 *punktów. Wykazać, że odległość pewnych dwóch punktów jest* $\leqslant 1$*.* ([Trad] 6).

10.9.4. *W trójkącie równobocznym o boku* 10 *umieszczono* 101 *punktów. Wykazać, że odległość pewnych dwóch punktów jest* $\leqslant 1$*.* ([StaZ] 6).

10.9.5 (van Aubel)**.** *Punkty* A_1, B_1, C_1 *leżą odpowiednio na bokach* CB, AC *i* AB *trójkąta* ABC*. Jeśli proste* AA_1, BB_1 *i* CC_1 *przecinają się w jednym wspólnym punkcie* P*, to*

$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1c}.$$

([Pa03] s.224).

★ S. J. Bilchev, *About an unexpected transition from algebra to geometry*, [MC] 17(2)(2004) 17-27.
Zb. Blajerski, *Twierdzenie Napoleona*, [Dlt] 6/2004 6-7.
J. Sandor, Artkuły o geometrii trójkąta w [Sand] 9-55.
J. Sandor, *Geometric inequalities* (Hungarian), Ed. Dacia 1988.
S. Simons, *Some features of the general Fermat point*, [MG] 87(509)(2003) 324-326. Dany jest trójkąt o wierzchołkach A, B, C. *Punktem Fermata* tego trójkąta nazywa się taki punkt F płaszczyzny, że suma odległości $AF + BF + CF$ jest najmniejsza.

⊡⊡

11 Zagadnienia geometryczne

⊡⊡

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.1 Punkty i proste na płaszczyźnie

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.1.1. *Na płaszczyźnie danych jest* 4000 *punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje co najmniej* 1000 *parami rozłącznych czworokątów o wierzchołkach w tych punktach.* ([DyM] 23).

11.1.2. *Na płaszczyźnie danych jest* 100 *punktów, których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Rozpatrzmy wszystkie możliwe trójkąty o wierzchołkach w tych punktach. Wykazać, że co najwyżej* 70% *trójkątów jest ostrokątnych.* ([Kw] 2/1971 55,63).

11.1.3. *Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim. Wykazać, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe o* 1. ([StaZ] 20).

D. Rozpatrzmy wiechołki trójkąta równobocznego o boku 1. Istnieją dwa wierzchołki tego samego koloru. ⊠

11.1.4. *Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim, przy czym istnieją punkty różnych kolorów. Wykazać, że istnieją dwa punkty różnych kolorów odległe o* 1. ([StaZ] 21).

11.1.5. *Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z trzech kolorów: czerwonym, niebieskim lub zielonym. Wykazać, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe o* 1. ([StaZ] 22).

11.1.6. *Na płaszczyźnie zaznaczono* $2n$ *punktów;* n *niebieskich i* n *czarnych, przy czym żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje* n *parami nie przecinających się odcinków, których końcami są punkty o różnych kolorach.*
([Kw] 8/1975 51, [Mat] 2/1995 119, [Dlt] 8/1996).

D. (Z. Bobiński). Niech $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i $\{B_1, \ldots, B_n\}$ będą zbiorami odpowiednio punktów niebieskich i czarnych. Należy wykazać, że istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ taka, że żadne dwa odcinki, spośród odcinków $A_1B_{\sigma(1)}, \ldots, A_nB_{\sigma(n)}$, nie przecinają się.

Oznaczmy przez S_n zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ i rozważmy funkcję $f : S_n \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |A_iB_{\sigma(i)}|.$$

Funkcja ta przyjmuje oczywiście tylko skończoną liczbę wartości. Niech τ będzie taką permutacją (należącą do S_n), że liczba $f(\tau)$ jest najmniejsza. Wykażemy, że odcinki $A_1B_{\tau(1)}, \ldots, A_nB_{\tau(n)}$ nie przecinają się.

Przypuśćmy, że wśród powyższych odcinków są dwa odcinki $A_pB_{\tau(p)}$, $A_qB_{\tau(q)}$, gdzie $p \neq q$, które się przecinają; niech X będzie ich punktem przecięcia. Niech $\sigma \in S_n$ będzie permutacją taką, że

$$\sigma(\tau(p)) = \tau(q), \quad \sigma(\tau(q)) = \tau(p), \quad \sigma(\tau(i)) = \tau(i) \quad \text{dla} \quad i \neq p, i \neq q.$$

Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} |A_pB_{\sigma\tau(p)}| + |A_qB_{\sigma\tau(q)}| &= |A_pB_{\tau(q)}| + |A_qB_{tau(p)}| \\ &< |A_pX| + |XB_{\tau(q)}| + |A_qX| + |XB_{\tau(p)}| \\ &= |A_pB_{\tau(p)}| + |A_qB_{\tau(q)}|. \end{aligned}$$

(Wykorzystaliśmy tu założenie, że żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej). Stąd wynika, że $f(\sigma\tau) < f(\tau)$ wbrew temu, że liczba $f(\tau)$ jest minimalna. ⊠

11.1.7. *Na płaszczyźnie dany jest nieskończony zbiór M o tej własności, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma jego punktami jest liczbą całkowitą. Wykazać, że zbiór M leży na jednej prostej.* ([Dlt] 2/1985).

11.1.8 (Graham, Rotschild, Strauss). ([Mon] 81(1)(1974))

(1) *Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ nigdy nie znajdziemy 4 punktów, których wszystkie możliwe odległości są całkowitymi liczbami nieparzystymi.* ([Mon] 81(1)(1974)), [Crux] 1999 s.2)

(2) *W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ istnieją $n+2$ punkty takie, że odległości pomiędzy każdymi dwoma są całkowitymi liczbami nieparzystymi $\iff$ $16 \mid n+2$.* ([Mon] 81(1)(1974)).

11.1.9. *Dane są na płaszczyźnie dwa punkty A i B oraz liczba rzeczywista c. Wówczas zbiór wszystkich takich punktów P tej płaszczyzny, że*

$$AP^2 - BP^2 = c$$

jest prostą prostopadłą do odcinka AB. Jeśli $c = 0$, to prostą tą jest symetralna odcinka AB. ([GuW] s.35).

11.1.10. *Dane są na płaszczyźnie punkty $A_1, \dots, A_n$, liczby rzeczywiste $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ oraz liczba rzeczywista c. Rozważmy zbiór $\mathcal{M}$ wszystkich takich punktów P tej płaszczyzny, że*

$$\lambda_1 A_1P^2 + \lambda_2 A_2P^2 + \cdots + \lambda_n A_nP^2 = c.$$

(1) *Jeśli $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, to $\mathcal{M}$ jest okręgiem, punktem lub zbiorem pustym.*

(2) *Jeśli $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, to $\mathcal{M}$ jest prostą, płaszczyzną lub zbiorem pustym.* ([GuW] s.35).

11.1.11. *Na płaszczyźnie danych jest 7 prostych. Wykazać, że co najmniej dwie z nich tworzą kąt $< 26^o$.* ([Kw] 7/1971 21, [G-if] 211).

11.1.12. *Na płaszczyźnie danych jest 12 prostych. Wykazać, że co najmniej dwie z nich tworzą kąt $< 16^o$.* ([Trad]).

11.1.13. *Nie można umieścić na płaszczyźnie 7 prostych i 7 punktów tak, aby przez każdy punkt przechodziły dokładnie trzy proste i na każdej prostej leżały dokładnie trzy punkty.* ([Kw] 6/1971 37).

11.1.14. *Niech A będzie zbiorem 50 odcinków leżących na prostej. Wykazać, że co najmniej jedno z następujących dwóch stwierdzeń jest prawdziwe:*

(1) *istnieje 8 odcinków należących do zbioru A posiadających punkt wspólny;*

(2) *istnieje 8 parami rozłącznych odcinków należących do zbioru A.* ([Kw] 3/1973 39).

11.1.15. *Niech A będzie skończonym zbiorem odcinków leżących na prostej. Niech M będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że istnieje na prostej M punktów o tej własności, że każdy odcinek ze zbioru A posiada co najmniej jeden z tych punktów. Niech m będzie największą liczbą parami rozłącznych odcinków należących do zbioru A. Wtedy $M = m$.* ([Kw] 3/1973 39).

11.1.16. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje prosta mająca dokładnie n punktów wspólnych z sinusoidą.* ([Mat] 4/1989 251).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.2 Podział płaszczyzny i przestrzeni

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.2.1. *Danych jest na płaszczyźnie n prostych. Proste te mogą dzielić płaszczyznę na co najwyżej $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ części.* ([Mat] 4/1949 52).

11.2.2. *Danych jest na płaszczyźnie n prostych. Jeśli proste te znajdują się w ogólnym położeniu (tj. żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie), to dzielą płaszyznę na dokładnie $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ części.* ([Ko95] 1.4.3).

11.2.3. *Danych jest w przestrzeni n płaszczyzn. Płaszczyzny te mogą dzielić przestrzeń na co najwyżej $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ części.* ([Mat] 5/1949 51).

11.2.4. *Na płaszczyźnie danych jest $n > 2$ punktów. Przez każde dwa spośród nich prowadzimy prostą i rozważamy punkty przecięcia wszystkich tych prostych. Niech $c(n)$ oznacza największą liczbę otrzymanych w ten sposób punktów przecięcia. Wtedy $c(3) = 3$ oraz $c(n) = n + 3\binom{n}{4}$, dla $n > 4$.* ([Mat] 4/1963 174).

11.2.5. *Płaszczyzna pozbawiona jednego punktu nie jest sumą rozłącznych prostych.* ([Dlt] 6/1975).

11.2.6. *Płaszczyzna pozbawiona przeliczalnego zbioru punktów nie jest sumą rozłącznych prostych.* ([Dlt] 6/1975).

D. Wynika, to z faktu, że rozłączne proste na płaszczyźnie są równoległe. ⊠

11.2.7. *Czy przestrzeń trójwymiarowa pozbawiona jednego punktu może być sumą rozłącznych prostych?* ([Dlt] 6/1975).

U. Redakcja Delty (patrz 6/1975 str. 7) nie zna odpowiedzi na to pytanie. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.3 Konstrukcje geometryczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.3.1. *Za pomocą jednej linijki skonstruować styczną do okręgu.* ([K-kw]).

11.3.2. *Na płaszczyźnie dane są punkt A i okrąg. Skostruować prostą przechodzącą przez punkt A, na której okrąg wyznacza cięciwę o danej długości d.* ([GuW] s.22).

11.3.3. *Skonstruować okrąg o danym promieniu styczny do danej prostej i danego okręgu.* ([GuW] s.25).

★ A. D. Bendukidze, *Złoty podział*, [Kw] 8/1973 22-27.
E. Berger, *Prosty przyrząd do podziału kąta na trzy równe części*, [Mat] 4(1953) 15-16.
A. L. Brudno, *Wokół cyrkla*, (o twierdzeniu Maskeroniego), [Kw] 10/1974 1-9.
M. Bryński, *Siedemnastokąt foremny*, [Dlt] 1/1989 6-7.
M. Erickson, A. Vazzana, *Construction of the regular* 17*-gon*, [ErV] 92-97.
D. B. Fuks, *Konstrukcje jednym cyrklem*, [Kw] 6/1987 34-37.
B. Gleichgewicht, *Kwadratura koła*, [Mat] 3/1960 138-140.
J. Górnicki, *Linijka, cyrkiel i przybliżone rozwiązania wielkich problemów*, [Dlt] 1/1987.
M. Kotlarek, *O pewnej przybliżonej metodzie podziału kąta* ..., [Mat] 4(1953) 16-17.
Yu. Michejev, *Jedną linijką*, [Kw] 10/1980 26-29.
D. Miklaszewski, *Cyrkiel, linijka i Australia*, o siedmiokącie foremnym, [Dlt] 3/1996 17.
W. D. Nilmie, *Cyrklem i linijką*, [Kw] 6/1975 2-9.
V. V. Prasolov, *Construction of a regular* 17*-gon*, [Pras] 15-17.
A. Sawin, *Cyrlkem i linijką*, [Kw] 5/1981 34-36.
W. Sierpiński, *O podziale kąta na trzy równe części* ..., [Mat] 4(1953) 14-15.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.4 Prostokąty i kwadraty

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.4.1. *W prostokącie 3×4 zaznaczono 6 punktów. Wykazać, że istnieją dwa punkty o odległości $\leqslant \sqrt{5}$.* ([G-if] 211, [WaJ] 324(82)).

11.4.2. *W kwadracie 1×1 danych jest 101 punktów. Wykazać, że istnieją trzy punkty tworzące trójkąt o polu $\leqslant 0,01$.* ([Kw] 7/1971 19, [G-if] 212).

11.4.3. *W kwadracie 1×1 znajduje się 51 punktów. Wykazać, że istnieją trzy punkty, które znajdują się wewnątrz okręgu o promieniu $\frac{1}{7}$.* ([Kw] 7/1971 21, [Fom] 20/1964).

R. Dzielimy kwadrat na 25 kwadracików o boku $\frac{1}{5}$. Co najmniej jeden z tych kwadracików zawiera trzy dane punkty. Taki kwadracik można pokryć kołem o promieniu $\frac{1}{7}$. ⊠

11.4.4. *Wewnątrz kwadratu o boku 1 znajduje się kilka okręgów, których suma obwodów wynosi 10. Wykazać, że istnieje prosta przecinająca co najmniej 4 z tych okręgów.* ([Kw] 2/1971 26 M21).

11.4.5. *Dana jest pewna liczba kwadratów o łącznym polu równym 1. Wykazać, że kwadraty te można umieścić (bez nakładania się) w kwadracie o polu 2.* ([Kw] 4/1973 35).

11.4.6. *Jeśli kwadrat można podzielić na n kwadratów, to n jest dowolną liczbą naturalną różną od* 2, 3 *i* 5. ([Ivan]).

11.4.7. *Jeśli prostokąt można podzielić na przystające trójkąty, to trójkąty te są prostokątne i ich liczba jest parzysta.* ([Kw] 10/1972 28).

11.4.8. *Jeśli kwadrat można podzielić na n trójkątów o równych polach, to n jest liczbą parzystą.* ([Kw] 2/1979 26).

11.4.9. *Jeśli prostokąt można podzielić na kwadraty, to można go podzielić na równe kwadraty.* ([K-kw]).

11.4.10. *Prostokąta* 55×39 *nie można podzielić na prostokąty o wymiarach* 5×11. ([OM] Leningrad 1990).

11.4.11. *Wewnątrz kwadratu o boku* 1 *znajduje się n^2 punktów. Wykazać, że istnieje łamana zawierająca te punkty, której długość jest mniejsza od $2n$.* ([Kw] 1/1979 30).

11.4.12. *Środki boków kwadratów połączono z wszystkimi wierzchołkami. Powstałe odcinki utworzyły ośmiokąt foremny. Jaki jest stosunek pola tego ośmiokąta do pola całego kwadratu?* Odp. 1/6. ([Kw] 3/2003 29-30).

11.4.13. *Wewnątrz kwadratu znajduje się n parami rozłącznych kół. Czy można podzielić ten kwadrat na wielokąty wypukłe tak, aby każdy z tych wielokątów zawierał dokładnie jedno koło?* Odp. *Tak można zawsze zrobić.* ([GuW] s.59).

★ A. J. W. Duijvestijn, P. J. Federico, P. Leeuw, *Compound perf. squares*, [Mon] 89(1)(1982) 15-32.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.5 Czworokąty

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.5.1 (Nierówność Ptolemeusza). *W każdym czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi nierówność*

$$AC \cdot BC \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

11.5.2 (Twierdzenie Ptolemeusza). *Czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$AC \cdot BC = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

11.5.3. *Jeśli w czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne są prostopadłe, to*

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2.$$

([GuW] s.37).

11.5.4. *Środki kwadratów zbudowanych (zewnętrznie lub wewnętrznie) na bokach czworokąta tworzą kwadrat wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest równoległobokiem.* ([Dlt] 6/2004, 6-7).

11.5.5. *Jeśli a, b, c, d są długościami boków czworokąta, to istnieje czworokąt o bokach długości*

$$\frac{\sqrt{a}}{4+\sqrt{a}}, \quad \frac{\sqrt{b}}{4+\sqrt{b}}, \quad \frac{\sqrt{c}}{4+\sqrt{c}}, \quad \frac{\sqrt{d}}{4+\sqrt{d}}.$$

(M. Klamkin, [Crux] 2001 s.76, jest to szczególny przypadek faktu 11.7.7).

★ D. Loeffler, *An extension of Ptolemy's theorem*, [Crux] 2001 326-327.
H. Pawłowski, *O pewnej charakteryzacji równoległoboku*, [Mat] 5/1994 286-288.
H. Pawłowski, *Twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenie Carnota i ciekawostka*, [Dlt] 1/1995 1-4.
S. Shirali, *On the generalized Ptolemey theorem*, [Crux] 1996 49-53.
M. Świerczek, *Zastosowania twierdzenia Ptolemeusza*, [Mat] 4(2003) 228-231.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.6 Wielokąty wypukłe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.6.1. *W każdym n-kącie wypukłym (dla $n \geqslant 4$) średnia arytmetyczna długości boków jest mniejsza od średniej arytmetycznej długości przekątnych.* ([OM] Moskwa 1987, [Pa03] s.93).

11.6.2. *Liczba punktów przecięcia przekątnych n-kąta wypukłego (dla $n \geqslant 4$) nie przekracza liczby*

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

i jest równa tej liczbie, gdy wszystkie punkty przecięcia są różne. ([Dlt] 6/1987).

11.6.3. *Każdy wielokąt wypukły o polu 1 jest zawarty w pewnym równoległoboku o polu 2.* ([Balk] 1993, [Pa03] s.1988).

11.6.4. *Niech $P_1, \dots, P_n$ będą wierzchołkami n-kąta foremnego. Jeśli punkt A leży na okręgu opisanym na tym n-kącie, to*

$$AP_1^2 + AP_2^2 + \cdots + AP_n^2 = 2nr^2, \quad AP_1^4 + AP_2^4 + \cdots + AP_n^4 = 6nr^4,$$

gdzie r jest promieniem okręgu opisanego. Powyższe liczby nie zależą od wyboru punktu A. ([Crux] 1997 s.348).

11.6.5. *Istnieje wypukły 1980-kąt, którego boki mają długości $1, 2, 3, \dots, 1980$ i wszystkie kąty są równe. Istnieje również taki 1981-kąt.* ([Musz] z.365).

★ S. B. Gaszkov, *Nierówności dla pól i obwodów wielokątów wypukłych*, [Kw] 10/1985 15-19.
F. Q. Gouvea, *Newton Polygons*, [Gouv] 215-236.
A. Kusznirenko, *Punkty kratowe w wielokątach i wielościanach*, [Kw] 4/1977 13-20.
A. Kusznirenko, *Wielokąty Newtona*, [Kw] 6/1977 19-24.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.7 Różne wielokąty

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.7.1. *Każde dwa wierzchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że został narysowany co najmniej jeden trójkąt o bokach tego samego koloru.*
([StaZ] 9, [Trad] 17).

11.7.2. *Wierzchołki siedmiokąta foremnego pomalowano jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim. Wykazać, że istnieje trójkąt równoramienny o wierzchołkach tego samego koloru.* Uwaga. *Takiej własności nie ma ośmiokąt foremny.* ([StaZ] 23).

11.7.3. *Każde dwa wierzchołki* 17*-kąta foremnego połączono odcinkiem zielonym, niebieskim lub czerwonym. Wykaż, że został narysowany co najmniej jeden trójkąt o bokach tego samego koloru.* ([StaZ] 10, [Trad]).

11.7.4. *W wierzchołkach* 65*-kąta wypukłego napisano różne liczby naturalne mniejsze od* 1978*. Wykazać, że istnieją dwie przekątne, dla których różnice liczb napisanych w końcach przekątnych są równe.* ([Mat] 1/1978 42).

11.7.5. *Na płaszczyźnie znajduje się skończona liczba wielokątów. Każde dwa wielokąty mają punkt wspólny. Wykazać, że istnieje prosta posiadająca punkt wspólny z każdym wielokątem.* ([Kw] 4/1976 32, [Dlt] 9/1985).

11.7.6. *Niech* $b_1, \dots, b_n$ *(gdzie* $n \geqslant 3$*) będą dodatnimi liczbami. Istnieje* n*-kąt o bokach* $b_1, \dots, b_n \iff$ *dla każdego* $i \in \{1, \dots, n\}$ *suma*

$$\sum_{j \neq i} b_j$$

jest ostro większa od b_i. ([Pie1] z.28).

11.7.7. *Niech* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *będzie niemalejącą funkcją wklęsłą taką, że* $f(0) = 0$*. Jeśli istnieje* n*-kąt o bokach* $a_1, \dots, a_n$*, to istnieje* n*-kąt o bokach* $f(a_1), \dots, f(a_n)$. ([Crux] 2001 s.76).

11.7.8. *Niech* $b_1, \dots, b_n$ *(gdzie* $n \geqslant 3$*) będą dodatnimi liczbami. Jeśli istnieje* n*-kąt o bokach* $b_1, \dots, b_n$*, to istnieje* n*-kąt wpisany w okrąg o takich bokach (w zadanej kolejności).* ([Pie1] z.30).

11.7.9. *Dany jest* n*-kąt wpisany w okrąg. Z ustalonego wierzchołka tego* n*-kąta prowadzimy wszystkie przekątne dzieląc go na* $n-2$ *trójkątów. W każdy z tych trójkątów wpisujemy okrąg. Wtedy suma promieni tych okręgów jest stała (tzn. nie zależy od wybranego wierzchołka).* ([Mat] 2/2005, 13-15).

11.7.10. *W każdym wielokącie (niekoniecznie wypukłym) istnieją dwa takie boki* a *i* b*, że*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = 1. \quad \text{([OM] Rosja 1996).}$$

D. (Dla trójkąta). Załóżmy, że $a \leqslant b \leqslant c$ są bokami trójkąta i przypuśćmy, że teza nie jest prawdziwa. Wtedy

$$\left[\frac{b}{a}\right] \geqslant 2 \quad \text{oraz} \quad \left[\frac{c}{b}\right] \geqslant 2.$$

zyli $2 \leqslant \left[\frac{b}{a}\right] \leqslant \frac{b}{a}$, więc $2a \leqslant b$ czyli $a \leqslant b/2$. Podobnie

$$2 \leqslant \left[\frac{c}{b}\right] \leqslant \frac{c}{b},$$

więc $2b \leqslant c$ czyli $b \leqslant c/2$. Mamy wtedy $a \leqslant b/2 \leqslant c/4$. Zatem,

$$a + b \leqslant \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{4}c < c,$$

i wobec tego mamy sprzeczność: $a + b < c$. Analogicznie dowodzimy dla dowolnego wielokąta. ⊠

★ L. M. Łopowok, *Wielokąty półforemne*, [Kw] 3/1971 25-29.
T. Żukowski, *Twierdzenie Cevy dla wielokątów*, [Dlt] 5(1999) 11-13.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.8 Wielościany wypukłe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W każdym wielościanie przez S, K oraz W oznaczamy odpowiednio liczbę ścian, liczbę krawędzi oraz liczbę wierzchołków tego wielościanu. Na przykład dla sześcianu mamy: $S = 6$, $K = 12$ oraz $W = 8$, a dla czworościanu: $S = 4$, $K = 6$ oraz $W = 4$.

11.8.1 (Wzór Eulera)**.** *W każdym wielościanie wypukłym zachodzi równość*

$$\boxed{S - K + W = 2}\ .$$

Dowód wzoru Eulera można znaleźć w różnych książkach (na przykład w: [CouR], [KrPS], [Als]).

11.8.2. *W każdym wielościanie wypukłym zachodzą następujące nierówności:*

(1) $S \geqslant 4,\ \ K \geqslant 6,\ \ W \geqslant 4;$

(2) $3W \leqslant 2K,\ \ 3S \leqslant 2K;$

(3) $W \leqslant 2S - 4,\ \ S \leqslant 2W - 4.$

D. Nierówności (1) są oczywiste. Nierówność $3W \leqslant 2K$ wynika z tego, że w każdym wierzchołku spotykają się co najmniej trzy krawędzie i każda krawędź łączy dwa wierzchołki. Nierówność $3S \leqslant 2K$ wynika z tego, że każda ściana ma co najmniej trzy boki i każda krawędź jest wspólnym bokiem dwóch ścian. Nierówności (3) wynikają z nierówności (2) oraz wzoru Eulera:

$$3W \leqslant 2K = 2(S + W - 2) = 2S + 2W - 4$$

i stąd $W \leqslant 2S - 4$. W ten sam sposób otrzymujemy nierówność $S \leqslant 2W - 4$. ⊠

11.8.3. *Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma dokładnie* 10 *ścian i* 20 *wierzchołków ?*

D. Takiego wielościanu wypukłego nie ma. Przypuśćmy, że jest. Wtedy $S = 10$, $W = 20$ i wtedy $W > 2S - 4$. Jest to sprzeczne z nierównością 11.8.2(3). ⊠

11.8.4. *Nie ma takiego wielościanu wypukłego, w którym wszystkie ściany są sześciokątami.* ([Mat] 2/1996 z.1350, [KrPS] s.111).

D. Przypuśćmy, że taki wielościan wypukły istnieje. Wtedy $6S = 2k$, czyli $K = 3S$ oraz $W \leqslant 2S - 4 < 2S$ (patrz 11.8.2(3)). Korzystamy ze wzoru Eulera i mamy sprzeczność: $2 = W - K + S = W - 3S + S = W - 2S < 0$. ⊠

Powyższe stwierdzenie jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego stwierdzenia 11.8.7.

Niech P będzie wielościanem wypukłym. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ oznaczmy przez S_n liczbę ścian o n krawędziach (bokach), a przez W_n liczbę tych wierzchołków, z których odchodzi dokładnie n krawędzi. Wtedy oczywiście

$$(*) \qquad S = S_3 + S_4 + S_5 + \cdots \quad \text{oraz} \quad W = W_3 + W_4 + W_5 + \cdots .$$

Ponieważ każda krawędź należy do dwóch ścian oraz każda krawędź łączy dwa wierzchołki, więc mamy dwie następne oczywiste równości:

$$(**) \qquad 2K = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \cdots \quad \text{oraz} \quad 2K = 3W_3 + 4W_4 + 5W_5 + \cdots .$$

11.8.5. *W każdym wielościanie wypukłym zachodzi nierówność*

$$\boxed{3S_3 + 2S_4 + S_5 \geqslant 12}\, .$$

D. ([Als]). Korzystamy z równości $(*)$, $(**)$ oraz wzoru Eulera pomnożonego przez sześć:

$$6S + 6W = 12 + 2K + 2(2K).$$

Lewa strona w tym wzorze jest równa $6S_3 + 6S_4 + 6S_5 + 6S_6 + \cdots + 6W_3 + 6W_4 + 6W_5 + 6W_6 + \cdots$, a po prawej stronie mamy $12 + 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + \cdots + 6W_3 + 8W_4 + 10W_5 + 12W_6 + \cdots$. Stąd otrzymujemy równość

$$3S_3 + 2S_4 + S_5 = 12 + S_7 + 2S_8 + 3S_9 + 4S_{10} + \cdots + 2W_4 + 4W_5 + 6W_6 + \cdots ,$$

z której wynika teza. ⊠

W ten sam sposób wykazujemy:

11.8.6. *W każdym wielościanie wypukłym zachodzi nierówność*

$$\boxed{3W_3 + 2W_4 + W_5 \geqslant 12}\, .$$

11.8.7. *Każdy wielościan wypukły ma ścianę o mniej niż sześciu bokach. Innymi słowy, w każdym wielościanie wypukłym istnieje co najmniej jedna ściana trójkątna lub czworokątna lub pięciokątna.* ([Poa], [Dlt] 10/1999 M897, [Als]).

D. Sposób I. Przypuśćmy, że takiej ściany nie ma. Wtedy $S_3 = S_4 = S_5 = 0$ i mamy sprzeczność wynikającą z nierówności 11.8.5.

Sposób II. Przypuśćmy, że takiej ściany nie ma. Wtedy $S_3 = S_4 = S_5 = 0$ i mamy:

$$2K = 6S_6 + 7S_7 + 8S_8 + \cdots \geqslant 6S_6 + 6S_7 + 6S_8 + \cdots = 6S,$$

a więc $k \geqslant 3S$. Wiemy ponadto, że $3W \leqslant 2K$ (patrz 11.8.2(2)). Korzystamy ze wzoru Eulera i otrzymujemy sprzeczność: $K + 2 = S + W \leqslant \frac{1}{3}K + \frac{2}{3}K = K$. ⊠

W ten sam sposób (wykorzystując na przykład nierówność 11.8.6) dowodzimy:

11.8.8. *Każdy wielościan wypukły ma co najmniej jeden taki wierzchołek, z którego odchodzi mniej niż* 6 *krawędzi.*

11.8.9. *Jeśli w wielościanie wypukłym żadna ściana nie jest ani czworokątem ani pięciokątem, to w tym wielościanie istnieją co najmniej cztery ściany trójkątne.*

D. Wynika to z nierówności 11.8.5. ⊠

11.8.10. *Każdy wielościan wypukły ma ścianę trójkątną lub kąt trójścienny.*
([Dlt] 10/1999, [KrPS] s.111).

D. Przypuśćmy, że $S_3 = 0$ oraz $W_3 = 0$. Wtedy $2K = 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + \cdots \geqslant 4(S_4 + S_5 + S_6 + \cdots) = 4S$, a więc wtedy $K \geqslant 2S$. W podobny sposób otrzymujemy nierówność $K \geqslant 2W$. Korzystamy ze wzoru Eulera i otrzymujemy sprzeczność: $K + 2 = S + W \leqslant \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K = K$. ⊠

11.8.11. *Każdy wielościan wypukły ma co najmniej cztery ściany trójkątne lub co najmniej cztery kąty trójścienne.* (Werner Mnich, [Mat] 1/1988 42, [KrPS] s.111).

D. (Józef Rączka). Dla danego wielościanu wypukłego oznaczmy przez s liczbę ścian trójkątnych, a przez p liczbę kątów trójściennych. Z każdego wierzchołka kąta trójściennego wychodzą dokładnie trzy krawędzie, zaś z każdego z $W - p$ pozostałych wierzchołków wychodzą co najmniej cztery krawędzie, a ponieważ każda krawędź łączy dwa wierzchołki, więc $K \geqslant \frac{3p+4(W-p)}{2} = \frac{4W-p}{2}$. Każdą ścianę trójkątną ograniczają dokładnie trzy krawędzie, zaś każdą z pozostałych $S - s$ ścian ograniczają co najmniej cztery krawędzie i ponieważ kada krawędź jest wspólna dla dwóch ścian, więc $K \geqslant \frac{3s+4(S-s)}{2} = \frac{4S-s}{2}$. Z otrzymanych nierówności otrzymujemy nierówność

$$2K \geqslant \frac{4W + 4S - (p + s)}{2},$$

czyli $p + s \geqslant 4(S - K + W) = 8$ (wykorzystaliśmy wzór Eulera), a to oznacza, że $p \geqslant 4$ lub $s \geqslant 4$. ⊠

11.8.12. *Każdy wielościan wypukły ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.*
([OM] Polska 1968/1969, [GaT] 14/73).

D. Sposób I. ([Mako] zadanie 9) Załóżmy, że w sali znajduje się $n \geqslant 2$ osób. Udowodniliśmy (patrz zadanie 4.2.1), że co najmniej dwie z tych osób mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych. (Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to B zna A). Z tezy tego zadania wynika łatwo teza rozpatrywanego stwierdzenia. Wyobraźmy sobie, że na każdej ścianie wielościanu znajduje się człowiek. i że znajomymi są ludzie znajdujący się na ścianach mających wspólną krawędź. Każdy z ludzi ma więc tylu znajomych, ile boków ma ściana, na której się znajduje. W myśl tezy wspomnianego zadania istnieją dwie osoby mające tę samą liczbę znajomych. Istnieją zatem dwie ściany mające tę samą liczbę boków.

Sposób II. Rozpatrzmy ścianę mającą największą liczbę boków i załóżmy, że n jest jej liczbą boków. Do tej ściany przylega, wzdłuż jej boków, n parami różnych innych ścian. Jest więc co najmniej $n+1$ ścian. Liczba boków każdej ściany jest jedną z liczb: $3, 4 \ldots, n$. Tych liczb jest $n-2$; mniej niż $n+1$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że istnieją co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.

Uwaga. W pierwszym i drugim dowodzie wykorzystaliśmy w istotny sposób założenie o wypukłości wielościanu. Korzystaliśmy bowiem z tego, że ściana będąca n-kątem przylega do n innych ścian. Nie jest to na ogół prawdą dla wielościanów niewypukłych (patrz na przykład [Mako] s. 8 lub [Mat] 5/1995 301). ⊠

11.8.13. *Każdy wielościan wypukły ma co najmniej trzy pary ścian o tej samej liczbie boków.* ([Mat] 5/1995 301).

11.8.14. *Każdy wielościan (niekoniecznie wypukły) ma co najmniej dwa wierzchołki o równych liczbach krawędzi.* ([UsaT] 2000/2001).

D. Załóżmy, że wielościan ma n wierzchołków. Liczba krawędzi każdego wierzchołka jest jedną z liczb $3, 4, \ldots, n-1$. Jest więc tych liczb mniej niż wierzchołków. Stosujemy zatem zasadę szufladkową Dirichleta. ⊠

11.8.15 (Coxeter). *Jeśli wszystkie ściany wielościanu wypukłego są równoległobokami, to liczba ścian jest postaci* $n(n+1)$. ([Mat] 6/1981 367).

11.8.16. *Istnieje wielościan wypukły mający* 1985 *ścian, wśród których są takie* 993 *ściany, że żadne dwie z nich nie mają wspólnej krawędzi.* ([OM] Polska 1986).

11.8.17. *Jeśli w wielościanie wypukłym mającym* K *ścian istnieje więcej niż* $K/2$ *ścian, z których żadne dwie nie mają wspólnej krawędzi, to w wielościan ten nie można wpisać kuli.* ([OM] Polska 1985).

11.8.18. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje wielościan wypukły mający dokładnie* n *przekątnych.* (*Przekątną wielościanu nazywamy odcinki łączące wierzchołki nie będące krawędziami, ani przekątnymi ścian.* ([Dlt] 2/1980).

11.8.19. *Wewnątrz sześcianu o boku* 1 *znajduje się* 2001 *punktów. Wykazać, że istnieje sfera o promieniu* $1/11$ *zawierająca wenątrz co najmniej trzy punkty.* ([Kw] 7/1971 19).

★ W. Boltianski, *Tranzytywne zbiory i wielościany foremne*, [Kw] 7/1980 4-9.
J. Dianni, *Wielościany półforemne*, Problemy 7/112 1955.
N. P. Dołbylin, *O wielościanach wypukłych*, [Kw] 5/1988 6-14.
W. Krysicki, *O mniej znanych własnościach wielościanów*, [KrPS] 101-147.
Zb. Marciniak, *Graniastosłup spotyka płaszczyznę*, [Dlt] 8/2003 6-7.
J. Merkel, *Wielościany półforemne*, [Mat] 5/1959 225-243.
Z. Pogoda, *Galeria Wielościanów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2005.
W. Sawczenko, *Półprawidłowe wielościany*, [Kw] 1/1976 2-7.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.9 Okręgi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.9.1. *Jeśli na płaszczyźnie danych jets n okręgów, to okręgi te mogą dzielić płaszczyznę na co najwyżej $2 + n(n-1)$ części.* ([Mat] 4/1949 52, 5/1965 227).

11.9.2. *Koło dzieli płaszczyznę na dwa obszary; można ją podzielić dwoma kołami na cztery, potem dorysować trzecie koło tak, aby powstała konfiguracja ośmio-obszarowa. Czy istnieje układ czterech kół dzielący płaszczyznę na 16 obszarów?* ([Pie1] z.31).

O. Nie. Cztery koła mogą co najwyżej podzielić płaszczyznę na 14 obszarów. ⊠

11.9.3. *Dla każdej liczby naturalnej n można dobrać konfigurację n kół dzielącą płaszczyznę na $n(n-1)+2$ obszary.* ([Pie1] z.31).

11.9.4. *Jeśli na okręgu leży co najmniej jeden punkt wymierny, to takich punktów jest nieskończenie wiele.*

11.9.5. *Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie bijekcją. Jeśli obraz dowolnego okręgu jest okręgiem, to obraz dowolnej prostej jest prostą.* ([SaP] 466).

11.9.6. *Jeśli okrąg przecina hiperbolę $xy = 1$ w czterech różnych punktach $(p_i,\ q_i)$, $i = 1,2,3,4$, to $p_1p_2p_3p_4 = 1$.* ([OM] Mołdawia 1995, [Pa03] 160).

★ I. Szarygin, A. Jagubjanc, *Okrąg dziewięciu punktów i prosta Eulera*, [Kw] 8/1981 34-37.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.10 Różne fakty i zadania geometryczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.10.1. *Jeśli $f(x,y)$ jest wielomianem stopnia $m \geqslant 1$, to zbiór $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 0\Big\}$ dzieli płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na co najwyżej $1 + \dfrac{m(m+1)}{2}$ obszarów.* ([Dlt] 5/2004 s.10).

11.10.2. *Dany jest na płaszczyźnie taki nieskończony zbiór punktów, że żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje wypukła krzywa, przechodząca przez nieskończony podzbiór tego zbioru.* ([K-kw]).

11.10.3.

(1) *Czy istnieje bijekcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taka, że dla każdych dwóch różnych punktów $A, B \in \mathbb{R}^2$ proste AB i $f(A)f(B)$ są prostopadłe ?*

(2) *Czy istnieje bijekcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że dla każdych dwóch różnych punktów $A, B \in \mathbb{R}^3$ proste AB i $f(A)f(B)$ są prostopadłe ?*

([OM] Białoruś 1999).

O. (1). Istnieje, np. $(x,y) \mapsto (y,-x)$ lub obrót o 90^o. (2). Nie. ⊠

★ D. B. Fuks, *Geometria kartki papieru*, [Kw] 9/1988 17-23.
M. Rassias, *Na ile obszarów krzywa algebraiczna może dzielić płaszczyznę?*, [Dlt] 5/2004 10-11.
N. Vasilev, *Złożenie figur*, [Kw] 4/1976 22-29.
S. L. Tabacznikow, *O krzywych płaskich*, [Kw] 11-12/1988 59-63.
A. Zaslavsky, *Geometryczne miejsce punktów*, [Kw] 5/2003 41-43.

---

12 Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

Zbiór liczb wymiernych jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Podzbiór ten ma szczególną własność. Jest to podzbiór gęsty, tzn. każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu składającego się z samych liczb wymiernych. To jest równoważne z tym, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ istnieje liczba wymierna a taka, że $x < a < y$. Podobną własność posiada zbiór wszystkich liczb niewymiernych; to też jest podzbiór gęsty zbioru liczb rzeczywistych. Oprócz wspomnianych podzbiorów istnieją jeszcze inne ciekawe podzbiory gęste. Dla przykładu zbiór wszystkich ułamków postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, jest gęstym podzbiorem zbioru dodatnich liczb rzeczywistych. Takiej własności nie posiada podobny zbiór wszystkich ułamków postaci $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami Fibonacciego. Te i podobne fakty wyjaśnimy dokładniej w tym rozdziale.

Zajmować się będziemy różnymi podzbiorami gęstymi pewnych podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. Najpierw, w początkowych podrozdziałach, pojawią się przestrzenie metryczne oraz przestrzenie topologiczne. Podstawowe pojęcia dotyczące tych przestrzeni znajdziemy w polskich książkach; na przkład: [Kur], [Eng], [Eng],[EnS1], [Dud1].

12.1 Podzbiory gęste

Załóżmy, że X jest ustaloną przestrzenią topologiczną i A jest jej podzbiorem. Mówimy, że podzbiór A jest *gęsty* w X, jeśli jego domknięcie jest całą przestrzenią X.

Przypomnijmy, że domknięcie zbioru A, oznaczane przez $\overline{A}$, jest najmniejszym zbiorem domkniętym w X zawierającym zbiór A. Innymi słowy, domknięcie $\overline{A}$ jest przekrojem mnogościowym wszystkich zbiorów domkniętych w X, zawierających zbiór A.

12.1.1. *Element p przestrzeni X należy do zbioru $\overline{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym zbiorze otwartym zawierającym p istnieje element należący do A*

D. Załóżmy, że $p \in \overline{A}$ i U jest zbiorem otwartym zawierającym p. Przypuśćmy, że w zbiorze U nie ma żadnego elementu ze zbioru A. Wtedy $A \cap U = \emptyset$, a więc zbiór A zawarty jest w zbiorze domkniętym $X \smallsetminus U$. Wtedy $\overline{A} \subseteq X \smallsetminus U$. Ponieważ $p \in \overline{A}$, więc $p \in X \smallsetminus U$. Zatem $p \notin U$, wbrew założeniu, że $p \in U$.

Załóżmy teraz, że każdy zbiór otwarty zawierający p zawiera element należący do A i przypuśćmy, że $p \notin \overline{A}$. Wtedy p należy do zbioru otwartego $X \smallsetminus \overline{A}$ i mamy sprzeczność: $\emptyset = (X \smallsetminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. ⊠

Stąd wynika:

12.1.2. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, każdy niepusty zbiór otwarty zawiera element zbioru A.*

12.1.3. *Jeśli A jest gęstym podzbiorem przestrzeni topologicznej X, to dla każdego zbioru otwartego U zachodzi równość*

$$\overline{U} = \overline{U \cap A}.$$

D. Oczywista jest inkluzja $\overline{U \cap A} \subseteq \overline{U}$. Załóżmy, że $p \in \overline{U}$ i niech V pędzie zbiorem otwartym zawierającym p. Wtedy (patrz 12.1.1) $V \cap U \neq \emptyset$; więc $U \cap V$ jest niepustym zbiorem otwartym. Z gęstości zbioru A wynika, że $(U \cap V) \cap A \neq \emptyset$. Ale $(U \cap V) \cap A = V \cap (U \cap A)$. Każdy więc niepusty zbiór otwarty zawierający p posiada element należący do $U \cap A$. Oznacza to (znowu na mocy 12.1.1), że $p \in \overline{U \cap A}$. Zatem $\overline{U} \subseteq \overline{U \cap A}$. ⊠

12.1.4. *Jeśli U i V są otwartymi zbiorami gęstymi, to $U \cap V$ również jest zbiorem gęstym.*

D. Wynika to wprost z 12.1.3: $\overline{U \cap V} = \overline{U} = X$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.2 Podzbiory brzegowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W dalszym ciągu zakładamy, że A jest podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Przez $\mathrm{Int}(A)$ oznaczamy wnętrze zbioru A. Przypomnijmy, że $\mathrm{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym w X zawartym w A. Innymi słowy, wnętrze $\mathrm{Int}(A)$ jest sumą mnogościową wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A. Jeśli zbiór $\mathrm{Int}(A)$ jest pusty, to mówimy, że A jest zbiorem *brzegowym*.

12.2.1. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, każdy niepusty zbiór otwarty zawiera element nie należący do A.*

D. Załóżmy, że zbiór A jest brzegowy i U jest dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Wtedy $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$, więc zbiór U nie jest zawarty w A. Istnieje zatem element x należący do U i nie należący do A.

Załóżmy teraz, że każdy niepusty zbiór otwarty zawiera element nie należący do A. Przypuśćmy, że $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$. Niech $x \in \mathrm{Int}(A)$. Istnieje wtedy taki zbiór otwarty U, że $x \in U$ oraz $U \subseteq A$. Zbiór U jest niepusty i nie ma elementów nie należących do A; sprzeczność. ⊠

12.2.2. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $X \smallsetminus A$ jest zbiorem gęstym w X.*

D. Załóżmy, że A jest zbiorem brzegowym i U jest dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Istnieje wtedy (patrz 12.2.1) w zbiorze U taki punkt x, który nie należy do A, czyli który należy do $X \smallsetminus A$. Z 12.1.2 wynika zatem, że $X \smallsetminus A$ jest zbiorem gęstym w X. W podobny sposób wykazujemy implikację w przeciwnym kierunku. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.3 Podzbiory nigdziegęste

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest zbiorem *nigdziegęstym*, jeśli jego domknięcie jest zbiorem brzegowym, tzn. jeśli $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$. Każdy więc zbiór nigdziegęsty jest w szczególności zbiorem brzegowym. Każdy domknięty zbiór brzegowy jest zbiorem nigdziegęstym. Jedynym otwartym zbiorem nigdziegęstym jest zbiór pusty. Jeśli A jest zbiorem nigdziegęstym, to jego domknięcie $\overline{A}$ również jest zbiorem nigdziegęstym.

12.3.1. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niepusty zbiór otwarty zawiera niepusty zbiór otwarty rozłączny ze zbiorem A.*

D. Załóżmy, że A jest zbiorem nigdziegęstym i U jest niepustym zbiorem otwartym. Wtedy $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$, więc zbiór U nie jest zawarty w zbiorze $\overline{A}$. Istnieje zatem takie $x_0 \in U$, że $x_0 \notin \overline{A}$. Element x_0 należy do otwartego zbioru $X \setminus \overline{A}$. Rozpatrzmy zbiór $V = U \cap (X \setminus \overline{A})$. Jest to niepusty zbiór (gdyż $x_0 \in V$) otwarty, zawarty w U i rozłączny ze zbiorem A.

Załóżmy teraz, że każdy niepusty zbiór otwarty zawiera niepusty zbiór otwarty rozłączny ze zbiorem A. Przypuśćmy, że $\mathrm{Int}(\overline{A}) \neq \emptyset$; niech $x_0 \in \mathrm{Int}(\overline{A})$. Istnieje wtedy taki zbiór otwarty U, że $x_0 \in U$ oraz $U \subseteq \overline{A}$. Ponieważ $x_0 \in U$, więc U nie jest zbiorem pustym Istnieje zatem taki niepusty zbiór otwarty V, że $V \subseteq U$ i $V \cap A = \emptyset$. Zbiór A jest zawarty w domkniętym zbiorze $X \setminus V$. Stąd wynika, że $\overline{A} \subseteq X \setminus V$, czyli $\overline{A} \cap V = \emptyset$. Ale $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq \overline{A}$, więc mamy sprzeczność: $\emptyset \neq V = V \cap \overline{A} = \emptyset$. ⊠

12.3.2. *Jeśli U jest zbiorem otwartym, to zbiór $\overline{U} \setminus U$ jest nigdziegęsty.*

D. Oznaczmy: $A = \overline{U} \setminus U$. Niech V będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Pokażemy, że istnieje taki niepusty zbiór otwarty V_0, który jest zawarty w V i który jest rozłączny ze zbiorem A. W przypadku, gdy $V \cap A = \emptyset$, przyjmujemy $V_0 = V$.

Załóżmy, że $V \cap A \neq \emptyset$ i niech $x_0 \in V \cap A$. Wtedy $x_0 \in \overline{U}$, więc (patrz 12.1.1) zbiór $U \cap V$ jest niepusty. Jest to otwarty zbiór zawarty w V i rozłączny ze zbiorem A. ⊠

12.3.3. *Załóżmy, że A, B, C są takimi podzbiorami przestrzeni topologicznej X, że*

$$A = B \cup C.$$

Jeśli A jest zbiorem gęstym i C jest zbiorem nigdziegęstym, to B jest zbiorem gęstym.

D. Niech U będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym w X. Udowodnimy, że przekrój $U \cap B$ jest niepusty.

Ponieważ zbiór C jest nigdziegęsty, więc (patrz 12.3.1) istnieje taki niepusty zbiór otwarty V, że $V \subseteq U$ i $V \cap C = \emptyset$. Ponieważ zbiór A jest gęsty, więc $A \cap V \neq \emptyset$. Mamy zatem:

$$\emptyset \neq A \cap V = (B \cup C) \cap V = (B \cap V) \cup (C \cap V) = (B \cap V) \cup \emptyset = B \cap V.$$

Stąd wynika, że $B \cap U \neq \emptyset$, gdyż $\emptyset \neq B \cap V \subseteq B \cap U$. Teza wynika zatem z 12.1.2. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.4 Podzbiory gęste w przestrzeniach metrycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy (patrz Podrozdział 1), że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest gęsty, jeśli w każdym niepustym zbiorze otartym znajduje się element należący do A. Załóżmy teraz, że X jest przestrzenią metryczną z metryką d. Każdy niepusty zbiór otwarty w X jest wtedy sumą mnogościową kul. Mamy zatem:

12.4.1. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej kuli znajduje się się element należący do A.*

Z tego faktu wynika następujące stwierdzenie.

12.4.2. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element przestrzeni X jest granicą ciągu o wyrazach należących do A.*

D. Załóżmy, że zbiór A jest gęsty i $p \in X$ jest dowolnym elementem. Wtedy każda kula o środku w punkcie p i promieniu $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, ma element a_n, należący do A. Mamy zatem ciąg (a_n) o wyrazach należących do A i przy tym

$$0 \leqslant d(p, a_n) < \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie d jest metryką przestrzeni X. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że 0 jest granicą ciągu $\Big(d(p, a_n)\Big)$ i stąd wynika, że p jest granicą (w przestrzeni X) ciągu (a_n).

Załóżmy teraz, że każdy element przestrzeni X jest granicą ciągu o wyrazach należących do A. Niech $K(p, r)$ będzie dowolną kulą w X; punkt p należy do X oraz $r > 0$ jest liczbą rzeczywistą. Istnieje wtedy ciąg (a_n), o wyrazach należących do A, którego granicą jest punkt p. Niech ε będzie liczbą rzeczywistą taką, ze $0 < \varepsilon < r$. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że $d(p, a_n) < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Ustalmy jedno n większe od n_0. Wtedy $d(p, a_n) < \varepsilon < r$, a zatem $a_n \in K(p, r)$. Wykazaliśmy, że każda kula zawiera element ze zbioru A. Zatem (patrz 12.4.1) zbiór A jest gęsty. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.5 Gęstość podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zbiór $\mathbb{R}$, wszystkich liczb rzeczywistych, jest przestrzenią metryczną z metryką $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną przy pomocy bezwzględnej wartości;

$$d(x, y) = |x - y|.$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Kulami w tej przestrzeni są wszystkie przedziały otwarte

$$(a, b) = \Big\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\Big\},$$

gdzie $a < b$ są liczbami rzeczywistymi.

Dowolny podzbiór X zbioru liczb rzeczywistych jest również przestrzenią metryczną, z metryką zdefiniowaną w powyższy sposób. Każdy zbiór otwarty takiej przestrzeni X jest postaci $U \cap X$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$. Kulą o środku w punkcie $p \in X$ i promieniu $r > 0$ jest zbiór $(p - r, p + r) \cap X$.

Interesować nas będą takie podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, które posiadają co najmniej dwa różne elementy i które są wypukłe. Przypomnijmy, że podzbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ jest wypukły, jeśli z tego, że dwie różne liczby rzeczywiste a, b do niego należą wynika, że cały przedział domknięty $[a, b]$ jest w nim zawarty. Wypukłymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych są, oprócz całego zbioru $\mathbb{R}$, wszystkie przedziały:

$$(a, b),\ (a, b],\ [a, b)\ [a, b],\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, \infty),\ [a, \infty),$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. W szczególności zbiór $\mathbb{R}^+$, wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych, jest takim podzbiorem wypukłym; $\mathbb{R}^+ = (0,\ +\infty)$.

12.5.1. *Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie wypukłym podzbiorem posiadającym co najmniej dwa elementy. Niech A będzie podzbiorem zbioru X. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Zbiór A jest gęstym podzbiorem przestrzeni X,*

(2) *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$, należących do X, istnieje liczba a taka, że*

$a \in A$ *oraz* $x < a < y$.

(3) *Każda liczba rzeczywista należąca do* X *jest granicą ciągu o wyrazach ze zbioru* A.

(4) *Dla każdej liczby rzeczywistej* $x \in X$ *i dla każdej liczby rzeczywistej* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $a \in A$, *że* $|a - x| < \varepsilon$.

(5) *Dla każdej liczby wymiernej* $q \in X$ *i dla każdej liczby rzeczywistej* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $a \in A$, *że* $|a - q| < \varepsilon$.

D. Równoważność (1) $\iff$ (3) już udowodniliśmy (patrz 12.4.2). Równoważność (1) $\iff$ (2) wynika z 12.4.1. Wykażemy równoważności (2) $\iff$ (4) $\iff$ (5).

(2) $\Rightarrow$ (4). Niech $x \in X$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Zbiór X ma co najmniej dwa elementy. Istnieje więc liczba y należąca do X i różna od x.

Załóżmy, że $x < y$. Ponieważ X jest zbiorem wypukłym oraz $x, y \in X$, cały przedział $[x, y]$ zawarty jest w X. Niech $\delta > 0$ będzie liczbą rzeczywistą mniejszą od $\min\{\varepsilon, y - x\}$. Wtedy $x + \delta \in X$, gdyż $x + \delta \in [x, y] \subseteq X$. Liczby x i $x + \delta$ należą do zbioru X, z warunku (2) wynika więc, że istnieje takie $a \in A$, że $x < a < x + \delta$. Wtedy

$$x - \varepsilon < x < a < x + \delta < x + \varepsilon$$

i mamy: $|a - x| < \varepsilon$. Podobnie postępujemy, gdy $x > y$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Ta implikacja jest oczywista.

(5) $\Rightarrow$ (2). Niech $x, y \in X$, $x < y$. Ponieważ X jest zbiorem wypukłym, więc cały przedział domknięty $[x, y]$ zawarty jest w X. Istnieje więc liczba wymierna q należąca do X i taka, że $x < q < y$. Niech $\varepsilon = \min\{q - x, y - q\}$. Z warunku (4) wiemy, że istnieje takie $a \in A$, że $q - \varepsilon < a < q + \varepsilon$. Wtedy

$$x \leqslant q - \varepsilon < a < q + \varepsilon \leqslant y.$$

Istnieje więc takie $a \in A$, że $x < a < y$. ⊠

W dowodzie implikacji (5) $\Rightarrow$ (2) wykorzystaliśmy dobrze znany fakt, że zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Przedstawmy dowód tego faktu. W tym celu najpierw wykazujemy następujący lemat.

12.5.2. *Jeśli* $a > 0$ *jest liczbą rzeczywistą, to istnieje liczba naturalna* n *taka, że*

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

D. Przypuśćmy, że to nie jest prawdą. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\dfrac{1}{n} \geqslant a$, z której wynika nierówność $n \leqslant \frac{1}{a}$. Zbiór liczb naturalnych jest więc wtedy ograniczony z góry (przez liczbę $\frac{1}{a}$), a to jest oczywiście sprzecznością. ⊠

Teraz możemy udowodnić:

12.5.3. *Zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.*

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Oznaczmy przez a dodatnią liczbę $y - x$ i niech n będzie liczbą naturalną taką, że

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

Taka liczba n istnieje na mocy 12.5.2. Rozpatrzmy liczbę wymierną $q = \dfrac{[nx] + 1}{n}$. Mamy wtedy:

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{[nx] + 1}{n} = q \leqslant \frac{nx + 1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + a = x + (y - x) = y.$$

Zatem q jest liczbą wymierną spełniającą nierówności $x < q < y$. ⊠

W jednym z następnych podrozdziałów wykorzystamy następujące stwierdzenie.

12.5.4. *Niech $r > 0$ będzie liczbą rzeczywistą i niech A będzie gęstym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^+$. Wtedy zbiór*

$$A^r = \left\{a^r;\ a \in A\right\}$$

również jest gęsty w $\mathbb{R}^+$.

D. Niech $0 < x < y$ będą liczbami rzeczywistymi. Ponieważ zbiór A jest gęsty, więc istnieje takie $a \in A$, że

$$x^{\frac{1}{r}} < a < y^{\frac{1}{r}}.$$

Mamy wtedy: $x < a^r < y$ i $a^r \in A^r$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.6 Lematy

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale udowodnimy kilka lematów, z których będziemy korzystać w następnych podrozdziałach. Pierwsze dwa lematy dotyczą granic ciągów.

12.6.1. *Niech (x_n) będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny i jego granica jest liczbą większą od zera. Wtedy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N_ε taka, że*

$$\left|\frac{x_n}{x_m} - 1\right| < \varepsilon,$$

dla wszystkich $n, m > N_\varepsilon$.

D. Niech $\lim x_n = a > 0$. Wtedy $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, więc ciąg $(1/x_n)$ jest zbieżny; jest więc ograniczony. Istnieje zatem takie $M > 0$, że $\left|\frac{1}{x_n}\right| \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, istnieje takie $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że $|x_n - x_m| < \varepsilon/M$ dla $n, m > N_\varepsilon$. Mamy zatem

$$\left|\frac{x_n}{x_m} - 1\right| = \left|\frac{x_n - x_m}{x_m}\right| = |x_n - x_m|\left|\frac{1}{x_m}\right| < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon,$$

dla wszystkich $n, m > N_\varepsilon$. ⊠

12.6.2. *Jeśli a, b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[an]}{[bn]} = \frac{a}{b}.$$

D. Istnieje takie n_0, że $bn > 1$ dla $n \geqslant n_0$ i wtedy

$$\frac{an-1}{bn} < \frac{[an]}{[bn]} < \frac{an}{bn-1}.$$

Ponieważ $\lim \dfrac{an-1}{bn} = \lim \dfrac{an}{bn-1} = \dfrac{a}{b}$, więc teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. ⊠

W następnych lematach mowa będzie o funkcjach wielomianowych.

12.6.3. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia $d \geqslant 1$, o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym równym c. Istnieje wtedy dodatnia liczba u taka, że*

$$f(n) \leqslant c(n+u)^d,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $f(x) = cx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$. Niech

$$r_i = \sqrt[i]{c^{-1}\binom{d}{i}^{-1}|a_{d-i}|}, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, d$$

i niech $u = \max(r_1, r_2, \dots, r_d)$. Wtedy $u > 0$ oraz $|a_{d-i}| \leqslant c\binom{d}{i}u^i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, d$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} f(n) &= cn^d + a_{p-1}n^{d-1} + \cdots + a_1n + a_0 \leqslant cn^d + |a_{p-1}|n^{d-1} + \cdots + |a_1|n + |a_0| \\ &\leqslant cn^d + c\binom{d}{1}un^{d-1} + c\binom{d}{2}u^2n^{d-2} + \cdots + c\binom{d}{d-1}u^{d-1}n + cu^d \\ &= c(n+u)^d, \end{aligned}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ⊠

12.6.4. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia $d \geqslant 1$, o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym równym c. Istnieją wtedy takie dodatnie liczby rzeczywiste v i M, że*

$$c(n-v)^d \leqslant f(n),$$

dla wszystkich liczb naturalnych n większych od M.

D. Dla $d = 1$ jest to oczywiste. Rozważmy przypadek $d = 2$. Niech $f(x) = cx^2 + ax + b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ i rozważmy liczby

$$v = c^{-1}\max(1, |a|, |b|), \quad M = 2v.$$

Wtedy $v > 0$, $M > 0$ i dla $n > M$ mamy:

$$\begin{aligned} c(n-v)^2 &= cn^2 - 2cvn + cv^2 = cn^2 - cvn - cvn + cv^2 \\ &\leqslant cn^2 - cvn - 2cv^2 + cv^2 = cn^2 - cvn - cv^2 \\ &\leqslant cn^2 - |a|n - |b| \leqslant cn^2 + an + b \\ &= f(n). \end{aligned}$$

Dalej załóżmy, że $d \geqslant 3$ i niech $f(x) = cx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Niech

$$v = c^{-1}\max(1, |a_{d-1}|, |a_{d-2}|, \dots, |a_1|, |a_0|), \quad M = vr, \quad \text{gdzie} \quad r = \max\left(\binom{d}{1}, \binom{d}{2}, \dots, \binom{d}{d-1}\right).$$

Przy tych założeniach, jeśli $\frac{d}{2} \geqslant k \in \mathbb{N}$ oraz $n > M$, to

$$\begin{aligned}
-c\binom{d}{2k-1}&v^{2k-1}n^{d-(2k-1)} + c\binom{d}{2k}v^{2k}n^{d-2k} \\
&\leqslant -2cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} - cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} + c\binom{d}{2k}v^{2k}n^{d-2k} \\
&\leqslant -2cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} - crv^{2k}n^{d-2k)} + c\binom{d}{2k}v^{2k}n^{d-2k} \\
&\leqslant -2cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} = -cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} - cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} \\
&\leqslant -|a_{d-(2k-1)}|n^{d-(2k-1)} - |a_{d-2k}|n^{d-2k} \\
&\leqslant a_{d-(2k-1)}n^{d-(2k-1)} + a_{d-2k}n^{d-2k}.
\end{aligned}$$

Stąd dla $n > M$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
c(n-v)^d &= cn^d + \Big(-c\tbinom{d}{1}v^1n^{d-1} + c\tbinom{d}{2}v^2n^{d-2}\Big) + \Big(-c\tbinom{d}{3}v^3n^{d-3} + c\tbinom{d}{4}v^2n^{d-4}\Big) + \dots \\
&\leqslant cn^d + \big(a_{d-1}n^{d-1} + a_{d-2}n^{d-2}\big) + \big(a_{d-3}n^{d-3} + a_{d-4}n^{d-4}\big) + \dots \\
&= f(n).
\end{aligned}$$

Zatem $c(n-v)^d \leqslant f(n)$, dla $n > M$. ⊠

Wykorzystamy również następujący oczywisty lemat.

12.6.5. *Niech $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$. Istnieje wtedy liczba całkowita b taka, że $0 \leqslant a\lambda + b < 1$.*

D. Przyjmujemy $b = -[a\lambda]$. Wtedy $a\lambda + b = a\lambda - [a\lambda] = \{a\lambda\}$ jest częścią ułamkową liczby ax i oczywiście $0 \leqslant a\lambda + b < 1$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.7 Twierdzenie Kroneckera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.7.1 (Twierdzenie Kroneckera)**.** *Jeśli λ jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{a\lambda + b;\ a, b \in \mathbb{Z}\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Oznaczmy $\delta = y - x > 0$ i niech n będzie taką liczbą naturalną (istniejącą na mocy 12.5.2), że $0 < \frac{1}{n} < \delta$. Podzielmy przedział $[0, 1)$ na n części:

$$\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right), \quad \Delta_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad \dots, \quad \Delta_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Wiemy (patrz lemat 12.6.5), że dla każdej liczby całkowitej a istnieje liczba całkowita b_a taka, że $0 < a\lambda + b_a < 1$. Każda liczba postaci $a\lambda + b_a$ należy do jednego z przedziałów $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Ponieważ tych przedziałów jest tylko skończenie wiele, a liczb całkowitych jest nieskończenie wiele, więc istnieją dwie różne liczby całkowite a i a_1 takie, że liczby $u = a\lambda + b_a$ oraz $u_1 = a_1\lambda + b_{a_1}$ należą do tego samego przedziału Δ_i. Wtedy $a \neq a_1$ oraz $|u - u_1| < \frac{1}{n}$. Z niewymierności liczby λ wynika, że $u \neq u_1$.

Możemy założyć, że $u > u_1$. Wtedy $|u-u_1| = u-u_1$. Ponadto, $u-u_1 = (a-a_1)\lambda+(b_a-b_{a_1}) = c\lambda+d$, gdzie $c, d \in \mathbb{Z}$.

Wykazaliśmy zatem, że istnieją dwie takie liczby całkowite c i d, że

$$0 < c\lambda + d < \frac{1}{n} < \delta = y - x.$$

Niech $p = c\lambda + d$ i rozpatrzmy zbiór

$$U = \Big\{u \in \mathbb{Z};\ pu > x\Big\} = \Big\{u \in \mathbb{Z};\ u > \frac{x}{p}\Big\}.$$

Jest to niepusty i ograniczony z dołu (przez liczbę $\frac{x}{p}$) podzbiór zbioru liczb całkowitych. Ma zatem element najmniejszy; oznaczmy ten najmniejszy element przez z. Wtedy $z \in \mathbb{Z}$ oraz $x < zp$. Pokażemy, że $zp < y$. Przypuśćmy, że $zp \geqslant y$. Wtedy

$$zp \geqslant y = x + (y-x) = x + \delta > x + \frac{1}{n} > x + p$$

i stąd $(z-1)p > x$. To oznacza, że $z-1$ należy do zbioru U i mamy sprzeczność z tym, że z jest najmniejszym elementem w zbiorze U. Zatem $x < zp < y$. Ale $zp = z(c\lambda + d) = (zc)\lambda + (zd)$ i liczby zc, zd są całkowite. Istnieją więc takie liczby całkowite a i b, że $x < a\lambda + b < y$ i to kończy dowód. ⊠

Wykażemy teraz, że w powyższym twierdzeniu Kroneckera można dodatkowo założyć, że wystpujące w nim liczby a są naturalne i to jeszcze większe od dowolnie ustalonej liczby naturalnej M. W tym celu najpierw wykażemy, że można dodatkowo założyć, że liczby a są niezerowe.

12.7.2. *Jeśli λ jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{a\lambda + b;\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Wykażemy, że istnieją takie liczby całkowite a, b, że $a \neq 0$ oraz $x < a\lambda + b < y$.

Istnieją (na mocy twierdzenia 12.7.1) takie liczby całkowite a i b, że $x < a\lambda + b < y$. Jeśli $a \neq 0$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $a = 0$. Wtedy $x < b < y$. W przedziale (x, y) znajduje się więc co najmniej jedna liczba całkowita. Załóżmy, że b jest najmniejszą liczbą całkowitą w tym przedziale. Wtedy $x < b < y$ i (znowu na mocy twierdzenia 12.7.1) istnieją liczby całkowite a_1, b_1 spełniające nierówności

$$x < a_1\lambda + b_1 < b.$$

Jeśli teraz $a_1 = 0$, to $x < b_1 < b < y$ i mamy sprzeczność z tym, że b jest najmniejszą liczbą całkowitą w przedziale (x, y). Zatem a_1 i b_1 są liczbami całkowitymi, $a_1 \neq 0$ oraz $x < a_1\lambda + b_1 < y$. ⊠

Teraz możemy wykazać następującą wzmocnioną wersję twierdzenia 12.7.1.

12.7.3. *Jeśli λ jest liczbą niewymierną i M jest liczbą naturalną, to zbiór*

$$\Big\{a\lambda + b;\ a, b \in \mathbb{Z},\ a > M\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Część I. Niech ε będzie liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$. Wykażemy najpierw, że istnieją takie liczby całkowite u i v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $u \geqslant 1$.

Przypuśćmy, że to nie jest prawdą. Na mocy twierdzenia 12.7.2, istnieją takie liczby całkowite a_0, b_0, że $a_0 \neq 0$ oraz $0 < a_0\lambda + b_0 < \varepsilon$. Z naszego przypuszczenia wynika, że a_0 jest liczbą ujemną. Niech $a_0 = -n_0$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$. Liczba n_0 należy do zbioru tych wszystkich liczb naturalnych n, dla których istnieje liczba całkowita b taka, że $0 < -n\lambda + b < \varepsilon$. Załóżmy, że n_0 jest najmniejszym elementem w tym zbiorze. Niech $0 < -n_0\lambda + b_0 < \varepsilon$ dla pewnego $b_0 \in \mathbb{Z}$; oznaczmy $p = -n_0\lambda + b_0$.

Ponieważ $0 < p$, więc (znowu na mocy 12.7.2) istnieją takie liczby całkowite a_1, b_1, że

$$0 < a_1\lambda + b_1 < p < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad a_1 \neq 0;$$

oznaczmy $q = a_1\lambda + b_1$. Z nierówności $0 < q < \varepsilon$ wynika, że $a_1 = -n_1$ dla pewnego $n_1 \in \mathbb{N}$ i ponadto, $n_1 \geqslant n_0$. Gdyby zachodziła równość $n_1 = n_0$, wówczas różnica $p - q$ byłaby liczbą całkowitą (równą $b_0 - b_1$) należącą do przedziału $(0,1)$; sprzeczność. Zatem $n_1 > n_0$. Zauważmy, że

$$0 < p - q = (-n_0\lambda + b_0) - (-n_1\lambda + b_1) = (n_1 - n_0)\lambda + (b_0 - b_1) < \varepsilon.$$

Mamy więc $0 < s\lambda + t < \varepsilon$, gdzie $s = n_1 - n_0$ oraz $t = b_0 - b_1$ są liczbami całkowitymi i przy tym $s > 0$. To jest jednak sprzeczne z tym co założyliśmy na początku tej części dowodu.

Dla każdej więc liczby rzeczywistej ε, spełniającej nierówności $0 < \varepsilon < 1$, istnieją takie liczby całkowite u, v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $v \geqslant 1$.

Część II. Niech ε będzie liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$. Wykażemy, że istnieją takie liczby całkowite u i v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $u > M$.

Liczba $(M+1)\lambda$ jest niewymierna. Z części pierwszej tego dowodu wynika więc, że istnieją takie liczby całkowite a i b, że $0 < a(M+1)\lambda + b < \varepsilon$ oraz $a \geqslant 1$. Niech $u = a(M+1)$, $v = b$. Wtedy $0 < u\lambda + v < \varepsilon$, $u, v \in \mathbb{Z}$, $u > M$.

Część III. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Niech $\varepsilon = \min\{1, (y-x)/2\}$ i rozważmy przedział $(x, x+\varepsilon)$. Niech c, d będą liczbami całkowitymi takimi, że

$$x < c\lambda + d < x + \varepsilon.$$

Takie liczby całkowite istnieją na mocy twierdzenia 12.7.1. Oznaczmy przez M_1 liczbę naturalną większą niż $M - c$. Z drugiej części tego dowodu wiemy, że istnieją takie liczby całkowite u, v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $u > M_1$. Przyjmijmy: $a = u + c$, $b = v + d$. Mamy wtedy $a = u + c > M_1 + c > (M - c) + c = M$ oraz

$$x = x + 0 < (c\lambda + d) + (u\lambda + v) = a\lambda + b < x + \varepsilon + \varepsilon = x + 2\varepsilon \leqslant x + 2\frac{y-x}{2} = y.$$

Zatem $x < a\lambda + b < y$ i przy tym $a > M$. To oznacza, że badany zbiór jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. ⊠

Twierdzenie Kroneckera 12.7.1 można również wysłowić w następującej wersji.

12.7.4. *Jeśli λ jest dodatnią liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{m\lambda - n;\ n, m \in \mathbb{N}\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Niech M będzie liczbą naturalną taką, że $M\lambda > y$. Istnieją takie liczby całkowite a, b, że $x < a\lambda + b < y$ oraz $a > M$ (wynika to z twierdzenia 12.7.3). Ponieważ $a > M$, więc $m = a$ jest liczbą naturalną. Przypuśćmy, że $b \geqslant 0$. Wtedy mamy sprzeczność: $y < M\lambda < a\lambda \leqslant a\lambda + b < y$. Zatem b jest ujemną łiczbą całkowitą; niech $b = -n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $x < m\lambda - n < y$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ i to kończy dowód. ⊠

Założyliśmy, że liczba niewymierna λ jest dodatnia. Dla ujemnych liczb niewymiernych mamy podobne twierdzenie.

12.7.5. *Jeśli λ jest ujemną liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{ m\lambda + n;\ \ n, m \in \mathbb{N} \Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Stosujemy twierdzenie 12.7.4 dla dodatniej liczby wymiernej $-\lambda$ i nierówności $-y < -x$. Istnieją takie liczby naturalne m, n, że $-y < m(-\lambda) - n < -x$. Mamy wtedy (po pomnożeniu przez -1) nierówności $x < m\lambda + n < y$. ⊠

W powyższych dwóch twierdzeniach można jeszcze dodatkowo założyć, że liczby naturalne m i n są większe od dowolnie ustalonych liczb naturalnych.

12.7.6. *Jeśli λ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz A, B są liczbami naturalnymi, to zbiór*

$$\Big\{ m\lambda - n;\ \ n, m \in \mathbb{N},\ \ m > A,\ \ n > B \Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Niech C będzie taką liczbą naturalną, że $(A+1)C\lambda - y > B$. Z twierdzenia 12.7.4, zastosowanego dla dodatniej liczby niewymiernej $(A+1)C\lambda$, istnieją takie liczby naturalne u, v, że $x < u\Big((A+1)C\lambda\Big) - v < y$. Przyjmujemy

$$m = u(A+1)C, \quad n = v.$$

Wtedy $x < m\lambda - n < y$ oraz $m > A$ i $n > B$. Istotnie: $m = u(A+1)C \geqslant A+1 > A$ oraz $n > m\lambda - y = u(A+1)C\lambda - y \geqslant (A+1)C\lambda - y > B$. ⊠

Podobnie wykazujemy następne twierdzenie.

12.7.7. *Jeśli λ jest ujemną liczbą niewymierną oraz A, B są liczbami naturalnymi, to zbiór*

$$\Big\{ m\lambda + n;\ \ n, m \in \mathbb{N},\ \ m > A,\ \ n > B \Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Pewne zastosowania twierdzenia Kroneckera przedstawimy w następnych podrozdziałach. Teraz podamy dwa inne zastosowania. Dotyczyć one będą początkowych cyfr liczb specjalnego typu. Dokładniejsze informacje na ten temat znajdują się w [N-2]. Tam również są wzmianki o pewnych wersjach twierdzenia Kroneckera.

12.7.8. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr (układu dziesiętnego) $c_1, c_2, \dots, c_k$ istnieje potęga dwójki, której k początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \dots, c_k$.*

D. Niech $c_1, \dots, c_k$ będą danymi cyframi. Oznaczmy:

$$M = c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \cdots + c_{k-1} 10 + c_k.$$

Ponieważ $\log_{10} 2$ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz

$$\log_{10} M < \log_{10}(M+1),$$

więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją takie liczby naturalne m, n, że

$$\log_{10} M < m \log_{10} 2 - n < \log_{10}(M+1).$$

Mamy wtedy kolejno:

$$n + \log_{10} M < m \log_{10} 2 < n + \log_{10}(M+1),$$
$$\log_{10}(10^n M) < \log_{10}(2^m) < \log_{10}(10^n(M+1)),$$
$$M10^n < 2^m < (M+1)10^n.$$

Początkowymi cyframi liczby 2^m są więc kolejno $c_1, \dots, c_k$. ⊠

12.7.9. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr (układu dziesiętnego) $c_1, c_2, \dots, c_k$ istnieje liczba kwadratowa, której k początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \dots, c_k$.*

D. Niech $c_1, \dots, c_k$ będą danymi cyframi. Oznaczmy:

$$M = c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \cdots + c_{k-1} 10 + c_k.$$

Ponieważ $\log_{10} 4$ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz $\log_{10} M < \log_{10}(M+1)$, więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją liczby naturalne m, n takie, że

$$\log_{10} M < m \log_{10} 4 - n < \log_{10}(M+1).$$

Mamy wtedy kolejno:

$$n + \log_{10} M < m \log_{10} 4 < n + \log_{10}(M+1),$$
$$\log_{10}(10^n M) < \log_{10}(4^m) < \log_{10}(10^n(M+1)),$$
$$M10^n < 4^m < (M+1)10^n.$$

Początkowymi cyframi liczby kwadratowej $(2^m)^2 = 4^m$ są więc kolejno $c_1, \dots, c_k$. ⊠

★ K. G. Bankow, *O pewnym twierdzeniu Kroneckera*, [Kw] 7/1986 5-7.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *Kronecker's theorem*, [HW4] 375-393.
K. Pióro, *Twierdzenie Kroneckera*, [Dlt] 6/2001, 12 - 13.
D. Wiśniewski, *Twierdzenie Kroneckera o gęstych podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych*, [Pmgr] 1991.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.8 Naturalna gęstość

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zajmować się będziemy podzbiorami zbioru liczb naturalnych.

Jeśli A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$, to dla każdej liczby naturalnej n przez $A(n)$ oznaczać będziemy liczbę wszystkich elementów zbioru $A \cap \{1, 2, \ldots, n\}$, tzn.

$$A(n) = \Big|\{a \in A;\ a \leqslant n\}\Big|.$$

Dla przykładu, jeśli A jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, to $A(1) = 0$, $A(2) = 1$, $A(3) = 1$, $A(4) = 2$ i ogólnie $A(n) = [n/2]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli ciąg $(A(n)/n)$ jest zbieżny, to jego granicę oznacza się przez $\delta(A)$ i nazywa *naturalną gęstością* (ang. "*natural density*") zbioru A. Zapamiętajmy:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}.$$

Interesować nas teraz będzie naturalna gęstość zbioru A. Patrzeć na nią będziemy jak na pewną "miarę" zbioru A w stosunku do całego zbioru liczb naturalnych. Każdy podzbiór skończony ma oczywiście naturalną gęstość równą 0. Zbiór wszystkich liczb naturalnych ma naturalną gęstość równą 1.

Załóżmy, że A jest zbiorem wszystkich naturalnych liczb parzystych. Co druga liczba naturalna jest parzysta. Wspomnieliśmy już, że $A(n) = [n/2]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy zatem:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{[n/2]}{n} = \frac{1}{2}.$$

Naturalna gęstość zbioru liczb parzystych istnieje i jest równa $\frac{1}{2}$. Podobnie jest dla dowolnych ciągów arytmetycznych o wyrazach naturalnych.

12.8.1. *Niech a, r będą liczbami naturalnymi i niech*

$$A = \{a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots\}.$$

Zbiór A posiada naturalną gęstość i jest ona równa $\frac{1}{r}$.

D. Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $k = A(n)$. Wtedy $a + (k-1)r \leqslant n$, $\ a + kr > n$, więc $k - 1 \leqslant \frac{n-a}{r} < k$ i stąd wynika, że

$$A(n) = 1 + \left[\frac{n-a}{r}\right]$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem: $\dfrac{n-a}{rn} = \dfrac{\frac{n-a}{r}}{n} < \dfrac{1 + [(n-a)/r]}{n} = \dfrac{A(n)}{n} \leqslant \dfrac{1 + \frac{n-a}{r}}{n} = \dfrac{n + r - a}{rn}$

i wobec tego

$$\frac{n-a}{rn} < \frac{A(n)}{n} \leqslant \frac{n + r - a}{rn}$$

i teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. ⊠

Istnieją takie podzbiory zbioru liczb naturalnych, które nie posiadają naturalnej gęstości. Spójrzmy na przykłady takich zbiorów.

12.8.2. *Zbiór*

$$A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ 2^{2s},\ 2^{2s}+1,\ 2^{2s}+2,\ \dots,\ 2^{2s+1}-1 \right\}$$

nie posiada naturalnej gęstości.

D. Przypuśćmy, że granica ciągu $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$ istnieje i jest ona równa x. Wtedy każdy podciąg tego ciągu również ma granicę równą x. Łatwo sprawdzić, że

$$A\left(2^{2n+1}\right) = \frac{4^{n+1}-1}{3}, \quad A\left(2^{2n}\right) = \frac{4^n+2}{3}.$$

Rozpatrzmy podciągi $\left(\frac{A(2^{2n+1})}{2^{2n+1}}\right)$ i $\left(\frac{A(2^{2n})}{2^{2n}}\right)$. Z powyższych równości wynika, że podciągi te są ciągami zbieżnymi, granica pierwszego ciągu jest równa $\frac{2}{3}$, a granicą drugiego ciągu jest $\frac{1}{3}$. Istnieją więc dwa zbieżne podciągi o różnych granicach. Ciąg $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$ nie ma więc granicy. ⊠

12.8.3. *Zbiór* $A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ 3^{2s},\ 3^{2s}+1,\ \dots,\ 3^{2s+1}-1 \right\}$ *nie posiada naturalnej gęstości.*

D. W tym przypadku $A\left(3^{2n+1}\right) = \frac{9^{n+1}-1}{4}$ oraz $A\left(3^{2n}\right) = \frac{9^n+3}{4}$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Podciągi $\left(\frac{A(3^{2n+1})}{3^{2n+1}}\right)$ i $\left(\frac{A(3^{2n})}{3^{2n}}\right)$ są więc ciągami zbieżnymi i ich granice są odpowiednio równe $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$. Istnieją zatem dwa zbieżne podciągi o różnych granicach. Ciąg $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$ nie ma więc granicy. ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

12.8.4. *Zbiór* $A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ 2^{3s-1},\ 2^{3s-1}+1,\ \dots,\ 2^{3s} \right\}$ *nie ma naturalnej gęstości.* ([HedR] 640).

12.8.5. *Zbiór*

$$A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ (2s)!,\ (2s)!+1,\ \dots,\ (2s+1)!-1 \right\}$$

nie ma naturalnej gęstości. ([NiZM] 475).

Przedstawimy teraz pewne własności naturalnej gęstości.

12.8.6. *Niech A będzie nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Jeśli zbiór A posiada naturalną gęstość, to*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

([NiZM] 473).

D. Załóżmy, że naturalna gęstość zbioru A jest równa u. Wtedy u jest granicą ciągu $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$. Każdy podciąg tego ciągu również ma granicę równą u. W szczególności podciąg $\left(\frac{A(a_n)}{a_n}\right)$ ma granicę równą u. Ale $A(a_n) = n$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a_n} = u = \delta(A)$. ⊠

12.8.7. *Niech A będzie nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Jeśli zbiór A posiada naturalną gęstość i gęstość ta jest większa od zera, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

([NiZM]).

D. Ciąg $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ jest (na mocy 12.8.6) zbieżny i jego granica jest większa od zera. Z 12.6.1 wynika więc, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że

$$\left|\frac{(n+1)a_n}{na_{n+1}} - 1\right| < \varepsilon,$$

dla $n > N_\varepsilon$. Ciąg $\left(\dfrac{(n+1)a_n}{na_{n+1}}\right)$ jest więc zbieżny do 1. Mamy zatem:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\left(\frac{(n+1)a_n}{na_{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1}\right) = \left(\lim \frac{(n+1)a_n}{na_{n+1}}\right)\left(\lim \frac{n}{n+1}\right) = 1 \cdot 1 = 1. \boxtimes$$

12.8.8 (E. Szemerédi 1975)**.** *Niech A będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Jeśli*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

jest liczbą większą od zera, w szczególności jeśli zbiór A ma dodatnią naturalną gęstość, to dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a, r, że wszystkie liczby

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+(n-1)r$$

są elementami zbioru A, tzn. zbiór A zawiera skończone postępy arytmetyczne dowolnej długości.

U. Twierdzenie to było najpierw hipotezą Erdösa. Udowodnił to E. Szemerédi w 1975 roku. Inny dowód, stosując teorię ergodyczną, podał w 1977 roku H. Furstenberg. Jeszcze inny dowód, stosując analizę Fouriera, podał w 1998 roku W.T. Gowers. ⊠

12.8.9. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli zbiór A ma naturalną gęstość, to zbiór $\mathbb{N} \setminus A$ również ma naturalną gęstość oraz*

$$\delta(A) + \delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1.$$

([NiZM] 475 z.2).

12.8.10. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ i niech $A + b = \{a + b;\ a \in A\}$. Jeśli zbiór A posiada naturalą gęstość, to zbiór $A + b$ również ją posiada i te gęstości są równe.* ([NiZM] 475 z.8).

12.8.11. *Jeśli A i B są takimi rozłącznymi podzbiorami zbioru liczb naturalnych, że zbiory A, B oraz $A \cup B$ mają naturalną gęstość, to*

$$\delta(A \cup B) \geqslant \delta(A) + \delta(B).$$

([NiZM] 475 z.10).

12.8.12. *Rozpatrzmy następujące podzbiory zbioru liczb naturalnych:*

$$\begin{aligned} A &= \text{zbiór wszystkich liczb parzystych}, \\ B_1 &= \text{zbiór liczb parzystych o parzystej liczbie cyfr}, \\ B_2 &= \text{zbiór liczb nieparzystych o nieparzystej liczbie cyfr}, \\ B &= B_1 \cup B_2. \end{aligned}$$

Zbiory A i B posiadają naturalną gęstość. Natomiast zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$ nie posiadają naturalnej gęstości. ([NiZM] 475 z.9).

Zajmiemy się teraz znanymi przykładami podzbiorów zbioru liczb naturalnych posiadających naturalną gęstość.

12.8.13. *Zbiór wszystkich liczb kwadratowych ma naturalną gęstość równą* 0.

D. Niech $A = \left\{n^2;\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A(n) \leqslant \sqrt{n}$. Mamy zatem

$$0 \leqslant \frac{A(n)}{n} \leqslant \sqrt{1/n}$$

i teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach, ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

12.8.14. *Niech $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. Zbiór $\left\{n^s;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ma naturalną gęstość równą zero.*

12.8.15. *Zbiór*

$$A = \bigcup_{s=2}^{\infty} \{n^s;\ n \in \mathbb{N}\} = \{a^s;\ a \in \mathbb{N}, 2 \leqslant s \in \mathbb{N}\}$$

ma naturalną gęstość równą zero. ([NiZM] 475 z.1(j)).

D. ([SavA] 175-176). Jeśli $a^s \leqslant n$, to

$$a \leqslant \left[\sqrt[s]{n}\right] \leqslant \sqrt{n}$$

oraz $s \leqslant \log_2(n)$. Zatem

$$A(n) \leqslant \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \left[\sqrt[4]{n}\right] + \cdots \leqslant \sqrt{n} \cdot \log_2(n),$$

a zatem $0 \leqslant \frac{A(n)}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}\log_2(n)}{n} = \frac{\log_2(n)}{\sqrt{n}}$. Ponieważ $\lim \frac{\log_2(n)}{\sqrt{n}} = 0$, więc (na mocy twierdzenia o trzech ciągach) gęstość $\delta(A)$ istnieje i jest równa zero. ⊠

12.8.16. *Zbiór wszystkich liczb pierwszych ma naturalną gęstość równą zero.*

D. Ze znanej równości

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$$

wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)}{n} = 0$. ⊠

12.8.17. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych względnie pierwszych z* 6 *ma naturalną gęstość równą* $\frac{1}{3}$.

12.8.18. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych względnie pierwszych z* 30 *ma naturalną gęstość równą* $\frac{3}{10}$.

12.8.19. *Niech* $a_1, \dots, a_s$ *będą liczbami naturalnymi i niech* A *będzie zbiorem tych wszystkich liczb naturalnych, które nie są podzielne przez żadną z liczb* $a_1, \dots, a_s$. *Zbiór* A *ma naturalną gęstość* $\delta(A)$ *i zachodzi równość*

$$\delta(A) = 1 + \sum_{r=1}^{s} (-1)^r \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_r\leqslant s} \frac{1}{\operatorname{nww}(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})}.$$

([NiZM] 476 z.11).

Mówimy, że liczba naturalna jest *bezkwadratowa* (ang. *squarefree*) jeśli nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby naturalnej większej od 1, tzn. jeśli jest jest równa 1 lub jest iloczynem parami różnych liczb pierwszych. W [N-3] jest oddzielny podrozdział o liczbach bezkwadratowych.

12.8.20. *Zbiór wszystkich liczb bezkwadratowych ma dodatnią naturalną gęstość równą* $\frac{6}{\pi^2}$. ([NiZM]).

12.8.21. *Jeśli* A *jest zbiorem wszystkich liczb bezkwadratowych, to dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzi nierówność* $A(n) > n/2$. ([NiZM] 474).

12.8.22. *Każda liczba naturalna większa od jedynki jest sumą dwóch liczb bezkwadratowych.* ([NiZM] 474).

D. Oznaczmy przez A zbiór wszystkich liczb naturalnych bezkwadratowych. Niech $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy dwa zbiory:

$$U = \Big\{a \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant a \leqslant n-1,\ a \in A\Big\}, \quad V = \Big\{b \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant b \leqslant n-1,\ n-b \in A\Big\}.$$

Suma $U \cup V$ ma co najwyżej $n-1$ elementów. Z 12.8.21 wynika, że

$$|U| + |V| > (n-1)/2 + (n-1)/2 = n-1.$$

Zbiory U i V nie mogą więc być rozłączne. Istnieje zatem liczba x należąca do części wspólnej tych zbiorów. Wtedy $x = a \in A$ oraz $x = n - b$ i $b \in A$. Zatem $n = a + b$, gdzie $a, b \in A$. ⊠

Mówimy, że liczba naturalna jest liczbą *Nivena*, jeśli jest podzielna przez sumę swoich cyfr. W [N-2] jest oddzielny rozdział o liczbach Nivena.

12.8.23 (R.E. Kennedy, C.N. Cooper 1984)**.** *Zbiór wszystkich liczb Nivena ma naturalną gęstość równą zero.*

12.8.24 (D. N. Lehmer 1900)**.** *Niech $a(n)$ i $b(n)$ będą liczbami pierwotnych trójkątów pitagorejskich, których odpowiednio przeciwprostokątne i obwody nie przewyższają n. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{n}=\frac{1}{2\pi},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b(n)}{n}=\frac{\ln 2}{\pi^2}.$$

([S59] 59).

12.8.25 (J. Lambek, L. Moser 1955)**.** *Niech $c(n)$ będzie liczbą pierwotnych trójkątów pitagorejskich, których pola nie przewyższają n. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c(n)}{\sqrt{n}}=u,$$

gdzie u jest pewną stałą równą $0,531340\cdots$. ([S59] 59).

★ R. E. Kennedy, C. N. Cooper, *On the natural density of the Niven numbers*, [Cmj] 15(4)(1984) 309-312.

R. E. Kennedy, C. N. Cooper, *Chebyshev's inequality and natural density*, [Mon] 96(2)(1989) 118-124.

I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *The density of sequences of integers*, [NiZM] 472-481.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.9 Gęste zbiory ułamków

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla danego podzbioru A zbioru liczb naturalnych, przez $Q(A)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych dających się przedstawić w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $a,b\in A$, tzn.

$$Q(A)=\left\{\frac{a}{b};\ a,b\in A\right\}.$$

Mówić będziemy, że taki podzbiór A jest *ułamkowo gęsty,* jeśli zbiór $Q(A)$ jest gęsty w zbiorze $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$.

W tym podrozdziale przedstawimy pewne przykłady ułamkowo gęstych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Najprostszym takim przykładem jest cały zbiór liczb naturalnych. W tym przypadku $Q(\mathbb{N})=\mathbb{Q}^+=\{q\in\mathbb{Q};\ q>0\}$ i oczywiście zbiór $\mathbb{Q}^+$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest również ułamkowo gęsty; jego zbiór ułamków jest całym zbiorem $\mathbb{Q}^+$.

12.9.1. *Zbiór wszystkich liczb kwadratowych jest ułamkowo gęsty.*

D. Niech x, y będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x < y$. Mamy wtedy dwie dodatnie liczby rzeczywiste $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$ spełniające nierówność $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. Ponieważ zbiór $\mathbb{Q}^+$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, więc istnieje dodatnia liczba wymierna $\frac{a}{b}$ (gdzie $a, b \in \mathbb{N}$) leżąca pomiędzy liczbami $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$. Wtedy

$$x < \frac{a^2}{b^2} < y$$

i to kończy dowód. ⊠

W ten sam sposób dowodzimy, że podobną włanośc mają zbiory wszystkich sześcianów, wszystkich bikwadratów i ogólniej:

12.9.2. *Niech* $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. *Zbiór* $\left\{n^s;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest ułamkowo gęsty.*

Każdy podzbiór ułamkowo gęsty jest zbiorem nieskończonym. Istnieją nieskończone podzbiory zbioru liczb naturalnych, które nie są ułamkowo gęste. Kilka przykładów:

12.9.3. *Zbiór* $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$, *wszystkich potęg dwójki, nie jest ułamkowo gęsty. Ogólniej, dla każdej liczby naturalnej* a, *zbiór* $\{a^0, a^1, a^2, \dots\}$ *nie jest ułamkowo gęsty.*

D. Zbiorem wszystkich ułamków o licznikach i mianownikach należących do $A = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ jest $Q(A) = \{2^s;\ s \in \mathbb{Z}\}$. Zbiór $Q(A)$ nie jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, gdyż na przykład nie ma takiej liczby, która należy do $Q(A)$ i jest pomiędzy liczbami 5 i 7. Podobnie uzasadniamy w przypadku ogólnym, gdy $A = \{a^0, a^1, \dots, \}$. ⊠

12.9.4. *Zbiór wszystkich liczb Fibonacciego nie jest ułamkowo gęsty.*

D. Przypomnijmy, że liczbą Fibonacciego nazywamy każdy wyraz ciągu (u_n), określonego równościami $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że nie ma takich dwóch liczb Fibonacciego u_n, u_m, że

$$1 < \frac{u_n}{u_m} < \frac{5}{4}.$$

Przypuśćmy, że są. Wtedy $u_m < u_n$, więc $m + 1 \leqslant n$. Jeśli $n \geqslant m + 2$, to $\frac{u_n}{u_m} \geqslant 2$. Istotnie,

$$\frac{u_n}{u_m} \geqslant \frac{u_{m+2}}{u_m} = \frac{u_{m+1} + u_m}{u_m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} + 1 \geqslant 1 + 1 = 2.$$

Możliwy więc jest tylko przypadek: $n = m + 1$. Ale wtedy $n > 1$ (gdyż $\frac{u_n}{u_m} > 1$) i mamy sprzeczność:

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{u_m + u_{m-1}}{u_m} = 1 + \frac{u_{m-1}}{u_m} \geqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{5}{4}.$$

Wykorzystaliśmy nierówność $\frac{u_{m-1}}{u_m} \geqslant \frac{1}{2}$, którą wykazujemy w następujący sposób: $2u_{m-1} = u_{m-1} + u_{m-1} \geqslant u_{m-1} + u_{m-2} = u_m$. ⊠

Przed podaniem następnych przykładów zanotujmy trzy stwierdzenia. Pierwsze stwierdzenie jest oczywiste.

12.9.5. *Niech* $A \subseteq B$ *będą podzbiorami zbioru liczb naturalnych. Jeśli zbiór* A *jest ułamkowo gęsty, to zbiór* B *również jest ułamkowo gęsty.*

Następne dwa stwierdzenia już nie są takie oczywiste.

12.9.6. *Niech A będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych i niech B będzie skończonym podzbiorem zbioru A. Jeśli zbiór A jest ułamkowo gęsty, to zbiór $A \setminus B$ również jest ułamkowo gęsty.* ([HedR]).

D. Jest jasne, że wystarczy to udowodnić tylko w przypadku, gdy zbiór B jest jednoelementowy. Załóżmy, że $B = \{b_0\}$, oznaczmy przez A_0 zbiór $A \setminus \{b_0\}$ i rozważmy zbiór

$$D = \left\{ \frac{b_0}{a};\ a \in A \right\} \cup \left\{ \frac{a}{b_0};\ a \in A \right\}.$$

Zauważmy, że każdy niepusty zbiór otwarty w $\mathbb{R}^+$ zawiera niepusty podzbiór otwarty rozłączny z D. Zatem (patrz 12.3.1), D jest podzbiorem nigdziegęstym. Mamy ponadto równość

$$Q(A) = Q(A_0) \cup D.$$

Z twierdzenia 12.3.3 wynika, że jeśli $Q(A)$ jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}^+$, to $Q(A_0)$ również jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}^+$. Zatem, jeśli zbiór A jest ułamkowo gęsty, to takim jest również zbiór A_0. ⊠

12.9.7. *Jeśli podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ posiada naturalną gęstość i ta gęstość jest liczbą większą od zera, to zbiór A jest ułamkowo gęsty.* ([HedR]).

D. ([HedR]). Załóżmy, że

$$\delta(A) = \lim \frac{A(n)}{n} = u > 0.$$

Ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Z twierdzenia 12.8.6 wiemy, że wtedy

$$u = \lim \frac{n}{a_n}.$$

Niech $0 < q \in \mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Istnieje wtedy (patrz lemat 12.6.1) liczba naturalna N_0 taka, że

$$\left| \frac{a_m}{a_n} \cdot \frac{1}{m/n} - 1 \right| = \left| \frac{n/a_n}{m/a_m} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{q},$$

dla wszystkich $n, m > N_0$. Istnieją oczywiście liczby naturalne n, m, które są większe od N_0 i takie, że $q = \frac{m}{n}$. Mamy wtedy

$$\left| \frac{a_m}{a_n} \cdot \frac{1}{q} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

i stąd, po pomnożeniu przez q,

$$\left| \frac{a_m}{a_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Ułamek $\frac{a_m}{a_n}$ należy do $Q(A)$. Z twierdzenia 12.5.1 wynika więc, że zbiór $Q(A)$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, a zatem zbiór A jest ułamkowo gęsty. ⊠

Zbiór liczb nieparzystych ma naturalną gęstość równą $\frac{1}{2}$. Zatem, ze stwierdzenia 12.9.7 wynika:

12.9.8. *Zbiór wszystkich nieparzystych liczb naturalnych jest ułamkowo gęsty.*

Zbiór wszystkich liczb naturalnych postaci $4k+3$ ma naturalną gęstość równą $\frac{1}{4}$. Zatem:

12.9.9. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych postaci $4k+3$ jest ułamkowo gęsty.*

Z faktów 12.9.7 i 12.8.1 wynika następujące ogólniejsze stwierdzenie.

12.9.10. *Każdy postęp arytmetyczny $\{a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \dots\}$, gdzie $a, r \in \mathbb{N}$, jest ułamkowo gęsty.*

Drobna modyfikacja dowodu stwierdzenia 12.9.7 pozwala nam wysłowić następne ogólniejsze stwierdzenie. Przypomnijmy, że jeśli A jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, to przez $A(n)$ oznaczamy liczbę tych wszystkich liczb a ze zbioru A, które spełniają nierówność $a \leqslant n$.

12.9.11. *Niech $r > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i niech A będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych takim, że ciąg*

$$\frac{A(n)}{n^r}$$

ma granicę i granica ta jest większa od zera. Wtedy zbiór A jest ułamkowo gęsty.

D. (I). Załóżmy, że

$$\lim \frac{A(n)}{n^r} = u > 0$$

i ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots .$$

Wtedy podciąg $\left(\dfrac{A(a_n)}{a_n^r}\right)$ również ma granicę i ta granica jest równa u. Ale $A(a_n) = n$. Mamy zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n^r} = u > 0.$$

Niech $0 < q \in \mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Istnieje wtedy (patrz lemat 12.6.1) liczba naturalna N_0 taka, że

$$\left| \frac{a_m^r}{a_n^r} \cdot \frac{1}{m/n} - 1 \right| = \left| \frac{n/a_n^r}{m/a_m^r} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{q},$$

dla wszystkich $n, m > N_0$. Istnieją oczywiście liczby naturalne n, m, które są większe od N_0 i takie, że $q = \dfrac{m}{n}$. Mamy wtedy $\left| \dfrac{a_m^r}{a_n^r} \cdot \dfrac{1}{q} - 1 \right| < \dfrac{\varepsilon}{q}$ i stąd, po pomnożeniu przez q,

$$\left| \frac{a_m^r}{a_n^r} - q \right| < \varepsilon.$$

Ułamek $\dfrac{a_m}{a_n}$ należy do $Q(A)$. Z twierdzenia 12.5.1 wynika więc, że zbiór $Q(A)^r = \Big\{ b^r;\ b \in Q(A) \Big\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$. Spójrzmy na stwierdzenie 12.5.4. Wynika z niego, że zbiór $Q(A) = \left(Q(A)^r\right)^{\frac{1}{r}}$ również jest gęsty. Zatem, zbiór A jest ułamkowo gęsty. ⊠

D. (II). Dla danej liczby rzeczywistej $x > 0$ oznaczmy przez $A(x)$ liczbę tych wszystkich elementów a ze zbioru A, które spełniają nierówność $a \leqslant x$. Jest jasne, że $A(x) = A([x])$.

Załóżmy, że $\lim \dfrac{A(n)}{n^r} = u > 0$ i niech $0 < x < y$ będą liczbami rzeczywistymi. Istnieje liczba naturalna n_0 taka, że

$$[xn] > 0, \ [yn] > 0, \ A(xn) > 0, \ A(yn) > 0,$$

dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Podciągi $\Big(A([xn])/[xn]^r\Big)$ i $\Big(A[yn]/[yn]^r\Big)$, rozpatrywane dla $n \geqslant n_0$, mają więc dodatnie wyrazy i są zbieżne do u. Iloraz tych podciągów jest zatem ciągiem zbieżnym i jego granica jest równa 1. Ponieważ

$$\lim \frac{[yn]^r}{[xn]^r} = \left(\frac{y}{x}\right)^r$$

(patrz 12.6.2), więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(yn)}{A(xn)} = \left(\frac{y}{x}\right)^r > 1.$$

Istnieje zatem takie n_1, że $A(yn) > A(xn)$ dla $n \geqslant n_1$. Stąd wynika, że dla każdego $n \geqslant n_1$ istnieje liczba a_n, należąca do zbioru A i taka, że

$$nx < a_n < ny.$$

Niech b będzie dowolną taką liczbą ze zbioru A, która jest większa od n_1. Wtedy $bx < a_b < by$ oraz $b, a_b \in A$. Zatem $x < \dfrac{a_b}{b} < y$ i $\dfrac{a_b}{b} \in Q(A)$. Zbiór $Q(A)$ jest więc gęsty w $\mathbb{R}^+$. ⊠

12.9.12. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia $d \geqslant 1$ o dodatnim współczynniku wiodącym równym c. Załóżmy, że $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ oraz, że $f(n) < f(m)$, gdy $n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Niech $A = f(\mathbb{N}) = \{f(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt[d]{n}} = \frac{1}{\sqrt[d]{c}}.$$

D. Wiemy (patrz lematy 12.6.3 i 12.6.4), że istnieją takie dodatnie liczby u, v, M, że

$$c(k-v)^d < f(k) < c(k+u)^d$$

dla wszystkich k większych od M. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że $A(n) > M$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$.

Rozpatrzmy dowolną liczbę naturalną n, większą od n_0. Niech $A(n) = k$. Wtedy $k > M$ oraz $f(k) \leqslant n < f(k+1)$, a zatem

$$c(k-v)^d < f(k) \leqslant n < f(k+1) < c(k+1+u)^d$$

i stąd $\sqrt[d]{c}(k-v) < \sqrt[d]{n} < \sqrt[d]{c}(k+1+u)$, czyli $\sqrt[d]{c}(A(n)-v) < \sqrt[d]{n} < \sqrt[d]{c}(A(n)+1+u)$. Po podzieleniu przez $A(n)$ otrzymujemy nierówności

$$\sqrt[d]{c}\frac{A(n)-v}{A(n)} < \frac{\sqrt[d]{n}}{A(n)} < \sqrt[d]{c}\frac{A(n)+1+u}{A(n)},$$

zachodzące dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Ponieważ $\lim A(n) = \infty$, więc ciągi skrajne są zbieżne do tej samej granicy, równej $\sqrt[d]{c}$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika zatem, że $\lim \dfrac{\sqrt[d]{n}}{A(n)} = \sqrt[d]{c}$ i stąd otrzymujemy tezę: $\lim \dfrac{A(n)}{\sqrt[d]{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[d]{c}}$. ⊠

12.9.13. *Jeśli $f(x)$ jest wielomianem dodatniego stopnia, o dodatnim współczynniku wiodącym i takim, że $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, to zbiór $f(\mathbb{N})$ jest ułamkowo gęsty.*

D. Niech $A = f(\mathbb{N}) = \{f(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Funkcja wielomianowa $f(x)$ jest od pewnego miejsca rosnąca. Istnieje zatem liczba naturalna p taka, że

$$f(n+p) < f(m+p),$$

gdy $n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy wielomian $g(x) = f(x+p)$ i niech $B = \{g(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Z twierdzeń 12.9.12 i 12.9.11 wynika, że zbiór B jest ułamkowo gęsty. Ale $B \subseteq A$. Zatem zbiór A również jest ułamkowo gęsty. ⊠

Z twierdzenia 12.9.13 otrzymujemy liczne przykłady zbiorów ułamkowo gęstych. Stosując to twierdzenie dla wielomianu $f(x) = rx + a$ (gdzie $a, r \in \mathbb{N}$), otrzymujemy nowy dowód na to, że postępy arytmetyczne są ułamkowo gęste (patrz 12.9.10). Zanotujmy inne przykłady.

12.9.14. *Zbiór* $\left\{n^2+1;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest ułamkowo gęsty.*

D. Twierdzenie 12.9.13 dla wielomianu $f(x) = x^2 + 1$. ⊠

12.9.15. *Zbiór wszystkich liczb trójkątnych jest ułamkowo gęsty.*

D. Przypomnijmy, że liczbą trójkątną nazywamy każdą liczbę naturalną postaci

$$\frac{1}{2}n(n+1).$$

Teza wynika z twierdzenia 12.9.13 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. ⊠

12.9.16. *Zbiór wszystkich liczb tetraedralnych jest ułamkowo gęsty.*

D. Liczbą tetraedralną jest każda liczba naturalna postaci

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(patrz na przykład [N-8]). Teza wynika z twierdzenia 12.9.13, zastosowanego dla wielomianu

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2). \quad ⊠$$

Liczby trójkątne i liczby tetraedralne można zapisać za pomocą symboli Newtona. Liczba trójkątna $\frac{1}{2}n(n+1)$ jest równa $\binom{n+1}{2}$. Liczba tetraedralna $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ jest natomiast równa $\binom{n+2}{3}$. Powyższe przykłady 12.9.15 i 12.9.16 są szczególnymi przypadkami następującego ogólniejszego przykładu.

12.9.17. *Przy ustalonym $k \in \mathbb{N}$, zbiór wszystkich liczb naturalnych postaci*

$$\binom{n+k-1}{k},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest ułamkowo gęsty.

D. Stosujemy twierdzenie 12.9.13 dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{k!}x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$. ⊠

Wiemy już (patrz 12.9.3), że jeśli a jest liczbą naturalną, to zbiór $B(a) = \{a^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nie jest ułamkowo gęsty. Dla danych liczb naturalnych a i b rozpatrzmy zbiór

$$B(a,b) = B(a) \cup B(b) = \left\{a^n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{b^n;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Można udowodnić (patrz 12.11.5):

12.9.18. *Jeśli $a \geqslant 2$ i $b \geqslant 2$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to zbiór $B(a,b)$ jest ułamkowo gęsty.* ([HedR]).

Stąd w szczególności wynika:

12.9.19. *Zbiór $\left\{2^n 3^m;\ n, m \in \mathbb{N}_0\right\}$ jest ułamkowo gęsty.*

D. Zbiór ten zwiera ułamkowo gęsty zbiór $B(2,3)$. Wystarczy więc wykorzystać 12.9.5. ⊠

12.9.20 (Ramanujan)**.** *Jeżeli $N(x)$ oznacza liczbę liczb naturalnych postaci 2^n3^m nie większych od x (gdzie $n, m \in \mathbb{N}_0$), to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(x)}{\ln^2(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{N(x)}{\ln(2x)\ln(3x)} = \frac{1}{2\ln 2 \cdot \ln 3}.$$

([S59] 267-268).

★ S. R. Garcia, V. Selhorst-Jones, D. E. Poore, N. Simon, *Quotient sets and diophantine equations*, [Mon] 118(8)(2011) 704-711.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.10 Ułamkowa gęstość zbioru liczb pierwszych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale przedstawimy dowód następującego twierdzenia Andrzeja Schinzla.

12.10.1 (A. Schinzel 1959)**.** *Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest ułamkowo gęsty. Innymi słowy, zbiór wszystkich liczb p/q, gdzie p i q są to liczby pierwsze, jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.* ([S59] 411, [S88] 165).

Przypomnijmy, że jeśli x jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to przez $\pi(x)$ oznacza się liczbę liczb pierwszych nie większych od x. W dowodzie twierdzenia 12.10.1 wykorzystuje się znane klasyczne twierdzenie (*prime number theorem*):

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

Wspominaliśmy o tym twierdzeniu w [N-4]. Z tego twierdzenia wynikają następujące wnioski.

12.10.2. *Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $x < y$, istnieje liczba naturalna n_0 taka, że*

$$\pi(nx) < \pi(ny)$$

dla wszystkich $n \geqslant n_0$. ([S59], [S88]).

D. ([S59] 410, [S88] 164). Niech $0 < x < y$. Z równości $(*)$ otrzymujemy równości

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi([nx])\ln([nx])}{[nx]} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi([ny])\ln([ny])}{[ny]} = 1.$$

Mamy ponadto, $\pi(nx) = \pi([nx])$, $\pi(ny) = \pi([ny])$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[ny]}{[nx]} = \frac{y}{x}$ (patrz 12.6.2) i łatwo wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln([ny])}{\ln([nx])} = 1.$$

Stąd wynika, że ciąg $\left(\frac{\pi(ny)}{\pi(nx)}\right)$ jest zbieżny i jego granica jest równa $\frac{y}{x}$. Mamy zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(ny)}{\pi(nx)} = \frac{y}{x} > 1.$$

Istnieje więc taka liczba naturalna n_0, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant n_0$ zachodzi nierówność

$$\frac{\pi(ny)}{\pi(nx)} > 1.$$

Mamy więc: $\pi(nx) < \pi(ny)$ dla $n \geqslant n_0$. ⊠

12.10.3. *Niech $x < y$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ istnieje liczba pierwsza q_n spełniająca nierówności*

$$nx < q_n < ny.$$

([S59], [S88]).

D. Niech z będzie liczbą rzeczywistą taką, że $x < z < y$. Istnieją wtedy (na mocy 12.10.2) takie liczby naturalne n_1 i n_2, że

$$\pi(nx) < \pi(nz)$$

dla $n \geqslant n_1$ oraz $\pi(nz) < \pi(ny)$ dla $n \geqslant n_2$. Liczbę $\max(n_1, n_2)$ oznaczmy przez n_0. Dla wszystkich $n \geqslant n_0$ zachodzą więc dwie nierówności

$$\pi(nx) < \pi(nz) \quad \text{i} \quad \pi(nz) < \pi(ny),$$

a zatem istnieją liczby pierwsze p, q takie, że

$$nx < p \leqslant nz, \quad nz < q \leqslant ny.$$

Przyjmujemy $q_n = p$ i mamy $nx < q_n < ny$. ⊠

Teraz możemy już udowodnić twierdzenie 12.10.1.

Dowód twierdzenia 12.10.1. ([S59] 410, [S88] 164). Niech x, y będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < x < y$. Istnieje wtedy (patrz 12.10.3) liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ w przedziale (nx, ny) znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza. Ponieważ liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, istnieje liczba pierwsza p, która jest większa od n_0. W przedziale (px, py) znajduje się więc jakaś liczba pierwsza q. Wtedy

$$px < q < py$$

i mamy: $x < \frac{q}{p}y$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest więc ułamkowo gęsty. ⊠

W przedstawionym dowodzie istotną rolę odegrała równość $(*)$. Zanotujmy jeszcze jeden wniosek wynikający z tej równości, o którym wspominaliśmy w [N-2].

12.10.4 (W. Sierpiński 1951)**.** *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr* (*układu dziesiętnego*) $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *istnieje liczba pierwsza, której m początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \ldots, c_m$.* ([S59], [Trost] 51, [S88])**.**

D. ([S59] 412). Niech a będzie m-cyfrową liczbą naturalną, której cyframi są kolejno $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Niech $x = a$, $y = a+1$. Wtedy $0 < x < y$, a więc (patrz 12.10.3) istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ w przedziale (nx, ny) znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza. Niech s będzie taką liczbą naturalną, że $10^s \geqslant n_0$. Wtedy w przedziale $(x10^s, y10^s)$ znajduje się jakaś liczba pierwsza p. Ponieważ

$$10^s a < p < 10^s(a+1),$$

więc początkowymi cyframi liczby pierwszej p są kolejno $c_1, c_2, \ldots, c_m$. ⊠

Stąd otrzymujemy natychmiast:

12.10.5. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr* (*układu dziesiętnego*) $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których m początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \ldots, c_m$.* ([S59], [Trost] 51, [S88])**.**

★ D. Hobby, D. M. Silberger, *Quotients of primes*, [Mon] 100(1993) 50-52.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.11 Zbiory gęste i ciągi liczb naturalnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale podamy pewne przykłady gęstych podzbiorów w $\mathbb{R}^+$ postaci

$$\left\{\frac{a_n}{b_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\},$$

gdzie (a_n) i (b_n) są nieskończonymi ciągami liczb naturalnych. W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się zbiorami tego typu przy dodatkowym założeniu, że ciągi (a_n) i (b_n) są takie same. Teraz nie będziemy tego zakładać. Zanotujmy najpierw dwa proste stwierdzenia.

12.11.1. *Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami dodatnich liczb rzeczywistych i niech*

$$A = \left\{\frac{a_n}{b_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{b_n}{a_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Jeśli zbiór A jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, to zbiór B również jest gęsty w $\mathbb{R}^+$.

D. Załóżmy, że A jest gęste w $\mathbb{R}^+$ i niech x, y będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < x < y$. Mamy wtedy nierówność

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Istnieje więc liczba $u = \dfrac{a_n}{b_m}$, należąca do A taka, że $\dfrac{1}{y} < u < \dfrac{1}{x}$. Stąd mamy:

$$x < \frac{1}{u} < y \quad \text{i} \quad \frac{1}{u} = \frac{b_m}{a_n} \in B.$$

Zatem zbiór B jest (na mocy 12.5.1) gęsty w $\mathbb{R}^+$. ⊠

W tym podrozdziale mówić będziemy, że dany ciąg (a_n) jest *specjalny*, jeśli dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x < y$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ w przedziale $(nx,\ ny)$ znajduje się co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n).

12.11.2. *Niech (a_n) i (b_n) będą takimi ciągami liczb naturalnych, że $\lim a_n = \infty$ i $\lim b_n = \infty$. Jeśli co najmniej jeden z tych ciągów jest specjalny, to zbiory*

$$A = \left\{\frac{a_n}{b_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{b_n}{a_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

są gęste w $\mathbb{R}^+$.

D. Załóżmy, że ciąg (a_n) jest specjalny. Niech $0 < x < y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ i niech n_0 będzie liczbą naturalną występującą w powyższej definicji ciągu specjalnego. Ponieważ $\lim b_n = \infty$, więc w ciągu (b_n) istnieje wyraz b_m, który jest większy od n_0. Wówczas w przedziale $(b_m x,\ b_m y)$ znajduje się co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n); niech to będzie wyraz a_n. Wtedy

$$x < \frac{a_n}{b_m} < y.$$

Zbiór A jest więc (na mocy 12.5.1) gęsty w $\mathbb{R}^+$. Gęstość zbioru B wynika z 12.11.1. ⊠

Wiemy (patrz 12.10.3), że ciąg (p_n), kolejnych liczb pierwszych, jest specjalny. Wiemy również (patrz stwierdzenia 12.9.12, 12.9.13 i drugi dowód twierdzenia 12.9.11), że specjalnym jest każdy ciąg postaci $(f(n))$, gdzie $f(x)$ jest wielomianem dodatniego stopnia o dodatnim współczynniku wiodącym i takim, że $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Mamy zatem kolejne przykłady gęstych podzbiorów zbioru dodatnich liczb rzeczywistych.

12.11.3. *Następujące zbiory są gęstymi podzbiorami w $\mathbb{R}^+$.*

$$\left\{\frac{p}{n^2+1};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{4n+1}{p};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{p}{2^n};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\frac{2^n-1}{p};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{2^{2^n}+1}{p};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{p}{u_n};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\frac{2^n-1}{u_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{u_n}{3^m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{t_n}{u_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\frac{n^3-1}{t_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{T_n}{3^m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{t_n}{T_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Oznaczenia: $\mathbb{P}$ = zbiór liczb pierwszych, u_n = n-ta liczba Fibonacciego, t_n = n-ta liczba trójkątna, T_n = n-ta liczba tetraedralna. Mamy tu również liczby Mersenne'a $2^n - 1$ i liczby Fermata $2^{2^n} + 1$.

W następnych przykładach wykorzystamy twierdzenie Kroneckera.

12.11.4. *Zbiór* $\left\{\frac{2^n}{3^m};\ n.m \in \mathbb{N}\right\}$ *jest gęstym podzbiorem w* $\mathbb{R}^+$.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}^+$, $0 < x < y$. Ponieważ $\log_3 2$ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz

$$\log_3 x < \log_3 y,$$

więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją takie liczby naturalne m, n, że

$$\log_3 x < m \log_3 2 - n < \log_3 y.$$

Mamy wtedy kolejno:

$$n + \log_3 x < m \log_3 2 < n + \log_3 y,$$
$$\log_3(3^n x) < \log_3(2^m) < \log_3(3^n y),$$
$$3^n x < 2^m < 3^n y$$

i stąd $x < \frac{2^m}{3^n} < y$. ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

12.11.5. *Jeśli* a, b *są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi większymi od* 1, *to zbiór*

$$\left\{\frac{a^n}{b^m};\ n.m \in \mathbb{N}\right\}$$

jest gęstym podzbiorem w $\mathbb{R}^+$. *Stąd w szczególniści wynika, że zbiór*

$$B(a, b) = \{a^n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

jest ułamkowo gęsty.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.12 Inne przykłady zbiorów gęstych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.12.1. *Jeśli* (a_n) *jest ciągiem takim, że* $\lim a_n = \infty$ *oraz* $A = \lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, *to zbiór*

$$\left\{a_n - a_m;\ n, m \in \mathbb{N}_0\right\}$$

jest gęsty w $\mathbb{R}$. ([K-pv] 117-118).

D. Niech x, y będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $x < y$. Udowodnimy, że pomiędzy x i y znajduje się co najmniej jedna liczba ze zbioru A.

Załóżmy najpierw dodatkowo, że $x \geqslant 0$. Niech $\varepsilon = y - x$. Ponieważ $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, istnieje liczba naturalna m taka, że

$$|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$$

dla wszystkich $n \geqslant m$. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówności $n > m$ oraz $a_n > a_m + x$. Taka liczba n istnieje, gdyż $\lim a_n = \infty$. Wtedy $a_{n-1} \leqslant a_m + x$ i mamy:

$$a_n < a_{n-1} + \varepsilon \leqslant a_m + x + \varepsilon = a_m + y.$$

Zatem $x + a_m < a_n < a_m + y$ i stąd $x < a_n - a_m < y$.

Niech teraz $x < 0$. Jeśli $y > 0$, to (na mocy pierwszej części tego dowodu) istnieje takie $a \in A$, że $0 < a < y$ i mamy wtedy $x < a < y$. Niech więc $y \leqslant 0$. Wtedy $-y < -x$ oraz $-y \geqslant 0$. Istnieje więc liczba $a = a_n - a_m \in A$ spełniająca nierówności $-y < a < -x$. Wtedy $x < -a < y$ i liczba $-a = a_m - a_n$ należy do zbioru A. ⊠

Stąd w szczególności wynika:

12.12.2. *Zbióry* $\left\{\sqrt{n} - \sqrt{m};\ m, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ *i* $\left\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m};\ m, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ *są gęstymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Ogólniej, każdy zbiór postaci*

$$\left\{\sqrt[s]{n} - \sqrt[s]{m};\ m, n \in \mathbb{N}_0\right\},$$

gdzie $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$, *jest gęsty w* $\mathbb{R}$. ([Putn] 1990, [K-pv] 117-118).

12.12.3. *Jeśli* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *jest funkcją taką, że*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0,$$

to ciąg $a_n = f(n)$ *spełnia założenia podane w* 12.12.1. ([K-pv] 117-118).

Przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową liczby rzeczywistej x.

12.12.4. *Jeśli* λ *jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\left\{\{n\lambda\};\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest gęsty w przedziale $(0, 1)$. ([S59] 265, [HW4], [HedR]).

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y < 1$. Wykażemy, że istnieje liczba naturalna n taka, że $x < \{n\lambda\} < y$.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\lambda > 0$. Niech M będzie liczbą naturalną taką, że $M\lambda > y$. Na mocy twierdzenia Kroneckera 12.7.3, istnieją takie liczby całkowite a, b, że $a > M$ oraz $x < a\lambda + b < y$. Wtedy $n = a$ jest liczbą naturalną oraz $b < 0$ (jeśli $b \geqslant 0$, to mamy sprzeczność:

$$y < M\lambda < a\lambda \leqslant a\lambda + b < y.$$

Niech $b = -m$, $m \in \mathbb{N}$. Ponieważ $0 < n\lambda - m < 1$, więc $m = [n\lambda]$ i stąd $a\lambda + b = n\lambda - [n\lambda] = \{n\lambda\}$. Zatem, $x < \{n\lambda\} < y$.

Przypadek 2. Załóżmy, że $\lambda < 0$. Mamy nierówności $0 < 1 - y < 1 - x < 1$. Ponieważ $-\lambda$ jest dodatnią liczbą niewymierną, więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją takie liczby naturalne n, m, że

$$1 - y < n(-\lambda) - m < 1 - x.$$

Wtedy oczywiście $m = [-n\lambda]$ i mamy:

$$n(-\lambda) - m = -m\lambda - [-n\lambda] = \{-n\lambda\} = 1 - \{n\lambda\}.$$

Zatem $1 - y < 1 - \{n\lambda\} < 1 - x$ i stąd $x < \{n\lambda\} < y$. ⊠

12.12.5 (V. Jarnik)**.** *Jeśli λ jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{\{p\lambda\};\ p \in \mathbb{P}\Big\}$$

jest gęsty w przedziale $(0, 1)$. ([S59] 267).

12.12.6. *Zbiór wszystkich liczb wymiernych postaci*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m},$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, *jest gęsty w zbiorze* $[0, \infty)$. ([Cmj] 28(5)(1997) s.409).

12.12.7. *Zbiór* $\left\{\frac{\varphi(n)}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest gęsty w przedziale* $(0, 1)$. ([S59] 210).

12.12.8 (A. Schinzel 1954)**.** *Zbiór* $\left\{\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest gęsty w zbiorze* $\mathbb{R}^+$. ([S59] 210).

12.12.9. *Przez* $\sigma(n)$ *oznaczamy sumę wszystkich dzielników naturalnych liczby naturalnej* n. *Zbiór*

$$\left\{\frac{\sigma(n)}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest gęsty w przedziale $(1, \infty)$. ([S59] 247).

12.12.10. *Zbiór* $\Big\{\sin x;\ x \in \mathbb{Z}\Big\}$ *jest gęsty w przedziale* $[-1, 1]$. ([Mat] 4/1988 224).

★ Łukasz Jaworski, *Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych*, [Pmgr] 2011.

Literatura

[AFe] T. Andreescu, Z. Feng, 103 *Trigonometry Problems. From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2005. ⟨64, 94, 150–152, 154⟩.

[Ald] H. L. Alder, *Partition identities - from Euler to the present*, The American Mathematical Monthly, 76(7)(1969), 733-746. ⟨116–118⟩.

[Als] C. Alsina, *Różne Oblicza Geometrycznego Piękna*, RBA Coleccionables S. A., Wydanie polskie, 2012. ⟨168, 169⟩.

[An-E] G. E. Andrews, K. Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge Univerity Press, 2004. ⟨112–118, 120⟩.

[AnAF] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 *Number Theory Problems. From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2007. ⟨40⟩.

[AndG] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2004. ⟨56⟩.

[Ands] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley Publishing Company, 1976. ⟨114–116, 118⟩.

[Andz] A. Andžāns, *Mathematical Problems for Junior Students*, 91/92 - 92/93, Riga, 1993. ⟨54⟩.

[B-ns] Z. Bobiński, P. Nodzyński, A. Świątek, *Kwadraty Magiczne*, Miniatury Matematyczne 30, Aksjomat, Toruń, 2010. ⟨67⟩.

[B-nu] Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Liga Zadaniowa*, (Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką), Aksjomat, Toruń, 2004. ⟨148, 160⟩.

[B-rs] J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa, 1975. ⟨81⟩.

[B-zm] V. I. Bernik, I. K. Żuk, O. W. Melnikow, *Zbiór Zadań Olimpijskich z Matematyki* (po rosyjsku), Narodnaja Aswieta, Minsk, 1980. ⟨88, 136⟩.

[Bach] W. Bachurska, *Problemy konstruowalności za pomocą cyrkla i linijki oraz innych przyrządów geometrycznych*, Praca magisterska, promotor P. Dowbor, Toruń, UMK, 2002. ⟨147, 148, 155⟩.

[Balk] Balkan Mathematical Olympiad. ⟨166⟩.

[Bedn] W. Bednarek, *Zbiór Zadań dla Uczniów Lubiących Matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1995. ⟨141⟩.

[Behf] H. Behforooz, *Nirror magic squares from latin squares*, The Mathematical Gazette, 91(521) (2007), 316-321. ⟨67, 73⟩.

[Bern] B. C. Berndt, *Number Theory in the Sprit of Ramanujan*, Student Mathematical Library 34, AMS 2006. ⟨120⟩.

[BoN] Z. Bobiński, P. Nodzyński, *Liga Zadaniowa*, (Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką), Czarny Kruk, Bydgoszcz, 1993. ⟨137⟩.

[Br80] J. Browkin, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom 5, 21-25, 69/70 - 73/74, WSiP, Warszawa, 1980. ⟨57⟩.

[Br83] J. Browkin, *Zbiór Zadań z Olimpiad Matematycznych*, tom 6, 26-30, 74/75 - 78/79, WSiP, Warszawa, 1983. ⟨8, 101⟩.

[Brok] J. Brokos, *Punkty kratowe*, Praca magisterska, UMK Toruń, 1985. ⟨135, 137–139, 141⟩.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995. ⟨8, 20, 49, 80, 81, 141⟩.

[CiCP] D. Ciesielska, K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Epsilon*, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków, 2002. ⟨45⟩.

[CieS] K. Ciesielski, J. Szczepański, *Egzaminy Wstępne z Matematyki na Uniwersytet Jagielloński* 1986−2003, Zadania i Odpowiedzi, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2004. ⟨61⟩.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America. ⟨64, 190, 202⟩.

[Copp] W. A. Coppel, *Number Theory, An Introduction to Mathematics*, Second Edition, Springer, 2009. ⟨114⟩.

[CouR] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest Matematyka*, PWN, Warszawa, 1967. ⟨168⟩.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie. ⟨1, 6, 16, 46, 63, 89, 94, 98, 145, 150, 152, 158, 159, 162, 166, 167⟩.

[Dic2] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. II. *Diophantine analysis*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992. ⟨113, 156, 157⟩.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006. ⟨46, 50, 94⟩.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny. ⟨1, 8, 16, 42, 45, 51, 64, 66, 74, 78, 100, 101, 107, 135, 136, 139, 140, 156, 160–172, 184⟩.

[Dud1] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, Część I, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1986. ⟨173⟩.

[DuM] M. Dumont, J. Meeus, *The four-numbers game*, Journal of Recreational Mathematics 13(1981), 89-96. ⟨121⟩.

[DyM] E. B. Dynkin, S. A. Mołczanow, A. L. Rozental, A. K. Tołpygo, *Zadania Matematyczne* (po rosyjsku), wydanie 3, Nauka, Moskwa, 1971. ⟨161⟩.

[Eng] R. Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, PWN, Warszawa, 1965. ⟨173⟩.

[EnS1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa, 1986. ⟨173⟩.

[ErV] M. Erickson, A. Vazzana, *Introduction to Number Theory*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2008. ⟨108, 109, 113, 114, 117, 164⟩.

[FieK] R. M. Fedorov, A. J. Kanel-Belov, A. K. Kovaldzhi, I. W. Yashchenko, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* 1993 − 2005 (po rosyjsku), MCNMO Moskwa, 2006. ⟨22⟩.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994. ⟨7, 22, 61, 80, 139, 141, 164⟩.

[Fre48] B. Freedman, *The four number game*, Scripta Mathematica 14(1948), 35-47. ⟨121, 124–126, 130, 132, 133⟩.

[G-gk] A. M. Gleason, R. E. Greenwood, L. M. Kelly, *The William Lowell Putnam Mathem. Competition. Problems and Solutions* 1938 − 1964, The Math. Assoc. America, 1980. ⟨106⟩.

[G-if] S. A. Genkin, I. W. Itenberg, D. V. Fomin, *Leningradzkie Kółka Matematyczne* (po rosyjsku), Kirow, ASA, 1994. ⟨50, 54, 56, 79, 162, 164⟩.

[G-kp] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka Konkretna*, PWN, Warszawa, 1996. ⟨114⟩.

[G-T] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. Math. (to appear); also available at `http://xxx.arxiv.org/math.NT/0404188`. ⟨73⟩.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986. ⟨8, 57–59, 141, 170⟩.

[Gouv] F. Q. Gouvea, *p-adic Numbers; An Introduction*, Second Edition, 2000. ⟨166⟩.

[Gr08] A. Granville, *Prime number patterns*, The American Mathematical Monthly, 115(4)(2008), 279-296. ⟨73, 74⟩.

[Grif] H. Griffin, *Elementary Theory of Numbers*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1954. ⟨113⟩.

[GuW] W. Gutenmacher, N. Wasiliew, *Proste i krzywe*, WSiP, Warszawa, 1995. ⟨162, 164, 165⟩.

[Gy04] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2004. ⟨79, 91, 159⟩.

[Hada] J. Hadamard, *Wykład geometrii elementarnej*, tom I, *Geometria na płaszczyźnie*, Warszawa, 1923. ⟨154⟩.

[Halm] P. Halmos, *Problems for mathematicians, young and old*, Math. Association of America, Washington, DC, 1991. ⟨51⟩.

[HedR] S. Hedman, D. Rose, *Light subsets of N with dense quotients sets*, American Mathematical Monthly, 7(116)(2009), 635-641. ⟨186, 192, 196, 201⟩.

[Hodi] E. Hódi, *Mozaika Matematyczna*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1987. ⟨74, 79⟩.

[HW4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1960. ⟨108, 113, 115–118, 120, 184, 201⟩.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. ⟨7, 42, 46, 49–51, 94, 109⟩.

[Ivan] O. A. Ivanov, *Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej* (po rosyjsku), Sankt Petersburg Univ., 1995. ⟨165⟩.

[Je88] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, wydanie 8, PSiP, Warszawa, 1988. ⟨82⟩.

[Jel] S. Jeleński, *Lilavati*, PZWS, Warszawa, 1971. ⟨74, 79⟩.

[K-ks] K. Kato, N. Kurokawa, S. Saito, *Number Theory* 1*. Fermat's Dream*, Translations of Mathematical Monographs 186, Amer. Math. Soc., 2000. ⟨157⟩.

[K-kw] A. J. Kaniel-Bielow, A. K. Kowaldży, J. B. Wasilev, *Zadania przygotowawcze do* 47 *moskiewskiej olimpiady matematycznej 1994 roku* (po rosyjsku), Moskwa, 1994. ⟨140, 164, 165, 172⟩.

[K-pv] K. S. Kedlaya, B. Poonen, R. Vakil, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition* 1985−2000*, Problems, Solutions, and Commentary*, The Mathematical Association of America, 2002. ⟨51, 200, 201⟩.

[Khr1] A. I. Khrabrov, *Around mongolian inequality*, (Russian), Matemat. Prosv., 3(7)(2003), 149-162. ⟨150–152⟩.

[Khr2] A. I. Khrabrov, *Around mongolian inequality*, (Russian), Appendix to: St Petersburg mathematical olympiad, 2002. Nevsky Dialekt, St Petersburg, 2002, 146-167. ⟨150–152⟩.

[Ko02] L. Kourliandtchik, *Impresje Liczbowe*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń, 2001. ⟨64, 153⟩.

[Ko95] A. I. Kostrykin, *Zbiór Zadań z Algebry*, PWN, Warszawa, 1995. ⟨163⟩.

[Kord] B. Kordiemski, *Rozrywki Matematyczne*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1956. ⟨74⟩.

[KrPS] W. Krysicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, *Z Geometrią za Pan Brat*, Wydawnictwo Akapit Press, Łódź 2000. ⟨168–171⟩.

[Kur] K. Kuratowski, *Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii*, PWN, Warszawa, 1980. ⟨173⟩.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie. ⟨1, 6–9, 43, 44, 47–50, 54, 55, 57, 58, 61–67, 72, 74, 75, 77–82, 101, 113, 114, 118, 135–138, 161–168, 171, 172, 184⟩.

[Magy] Z. Magyar, *A recursion on quadruples*, The American Mathematical Monthly, 91(1984), 360-362. ⟨121, 129⟩.

[Mako] A. Mąkowski, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, Bibiloteczka Delty 3, Warszawa, 1980. ⟨55, 170, 171⟩.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie. ⟨66⟩.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli. ⟨1, 18, 19, 47–49, 55, 58, 59, 61, 64, 66, 68, 69, 71, 74–76, 78, 80, 81, 94, 95, 101, 136–139, 141, 151, 154, 159, 161, 163, 164, 166, 167, 169–172, 202⟩.

[MatC] Mathematics of Computations, American Mathematical Society, czasopismo matematyczne. ⟨91⟩.

[MatZ] Mathematische Zeitschrift, (Math. Z.), czasopismo matematyczne. ⟨155⟩.

[MC] Mathematics Competitions, popularne czasopismo matematyczne ⟨64, 145, 160⟩.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong. ⟨1, 36, 37, 55, 64⟩.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne. ⟨1, 5, 6, 44, 55, 74, 91, 92, 98, 113, 114, 118, 138, 146, 159, 160⟩.

[Mill] R. Miller, *A game with n numbers*, The American Mathematical Monthly, 85(1978), 183-185, ⟨121, 130, 132, 133⟩.

[Min] Miniatury Matematyczne, Komitet Organizacyjny Konkursu "Kangur Matematyczny", Zespół Redakcyjny: Z. Bobiński, P. Jarek, P. Nodzyński, A. Świątek, M. Uscki, Toruń, 1996-2012. ⟨64, 135–138⟩.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne. ⟨74, 91, 146, 157⟩.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012. ⟨61, 101, 146, 147⟩.

[Mock] Mock Putnam Exam. ⟨8⟩.

[Mol2] R. A. Mollin, *Fundamental Number Theory with Applications*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2008. ⟨62, 113, 114, 117⟩.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America. ⟨1, 8, 9, 16, 36–38, 41, 44, 59, 67, 73, 74, 79, 81, 82, 91, 92, 94, 97, 98, 101, 118, 120, 138, 154, 155, 157–159, 162, 165, 190, 196, 198⟩.

[MR] Mathematical Reviews. ⟨42⟩.

[Musz] D. Ch. Musztari, *Przygotowanie do Olimpiad Matematycznych. Zadania - Tematy - Metody*, Oficyna "Adam", Warszawa, 2000. ⟨166⟩.

[N-1] A. Nowicki, *Liczby Wymierne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.1, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012. ⟨97⟩.

[N-2] A. Nowicki, *Cyfry Liczb Naturalnych*, Podróże po Imperium Liczb, cz.2, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012. ⟨61, 184, 190, 198⟩.

[N-3] A. Nowicki, *Liczby Kwadratowe*, Podróże po Imperium Liczb, cz.3, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012. ⟨62, 67, 189⟩.

[N-4] A. Nowicki, *Liczby Pierwsze*, Podróże po Imperium Liczb, cz.4, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012. ⟨54, 73, 196⟩.

[N-5] A. Nowicki, *Funkcje Arytmetyczne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.5, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2009. ⟨114⟩.

[N-7] A. Nowicki, *Ciągi Rekurencyjne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.7, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010. ⟨63, 128⟩.

[N-8] A. Nowicki, *Liczby Mersenne'a, Fermata i Inne Liczby*, Podróże po Imperium Liczb, cz.8, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010. ⟨195⟩.

[N-9] A. Nowicki, *Sześciany, Bikwadraty i Wyższe Potęgi*, Podróże po Imperium Liczb, cz.9, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010. ⟨157⟩.

[N10] A. Nowicki, *Liczby i Funkcje Rzeczywiste*, Podróże po Imperium Liczb, cz.10, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010. ⟨39–41⟩.

[N11] A. Nowicki, *Silnie i Symbole Newtona*, Podróże po Imperium Liczb, cz.11, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011. ⟨132⟩.

[N13] A. Nowicki, *Nierówności*, Podróże po Imperium Liczb, cz.13, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011. ⟨146⟩.

[N14] A. Nowicki, *Równanie Pella*, Podróże po Imperium Liczb, cz.14, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011. ⟨158⟩.

[Nams] Notices of the American Mathematical Society. ⟨120⟩.

[NiZM] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons Inc., 1991. ⟨114, 118, 186–190⟩.

[Nyb] M. A. Nyblom, *Some curious sequences involving floor and ceiling functions*, The American Mathematical Monthly, 109(6)(2002) 559-564. ⟨40, 41⟩.

[OM] Olimpiada Matematyczna. ⟨5–9, 16, 18, 19, 22, 42, 46, 47, 49, 50, 55–57, 59, 61, 64, 66, 79–81, 89, 92–94, 98–101, 145, 146, 148, 151, 152, 155, 165–167, 170–172⟩.

[OMm] Mała Olimpiada Matematyczna. ⟨20, 55⟩.

[Pa03] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata. Trygonometria i Geometria*, Tutor, Toruń, 2003. ⟨152, 154, 160, 166, 172⟩.

[Pa94] H. Pawłowski, *Kółko Matematyczne dla Olimpijczyków*, Turpress, Toruń, 1994. ⟨64⟩.

[Pams] Proceedings of the American Mathematical Society, (Proc. Amer. Math. Soc.). ⟨118⟩.

[Pick] C. A. Pickover, *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*, Princeton University Press, 2002. ⟨68⟩.

[Pie1] E. Piegat, *Jeszcze* 105 *zadań Hugona Steinhausa*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2000. ⟨167, 172⟩.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki. ⟨20, 64, 66, 74, 133, 184, 202⟩.

[Poa] G. Pólya, *Odkrycie Matematyczne*, WNT, Warszawa, 1975. ⟨169⟩.

[Pras] V. V. Prasolov, *Essays on numbers and figures*, American Mathematical Society, 2000. ⟨164⟩.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition. ⟨1, 21, 51, 57, 97, 101, 105, 137, 146, 201⟩.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950. ⟨105, 108, 113, 157, 158⟩.

[S57] W. Sierpiński, *Czym Zajmuje się Teoria Liczb*, Warszawa, 1957. ⟨107⟩.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959. ⟨40, 48, 49, 66, 83, 88, 90, 91, 98, 107, 120, 136, 138, 190, 196–198, 201, 202⟩.

[S59a] W. Sierpiński, *O Stu Prostych, ale Trudnych Zagadnieniach Arytmetyki. Z Pogranicza Geometrii i Arytmetyki*, Biblioteczka Matematyczna 6, PZWS, Warszawa, 1959. ⟨135–140⟩.

[S88] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, Editor: A. Schinzel, North-Holland Mathematical Library, Vol. 31, 1988. ⟨48, 49, 196–198⟩.

[SalS] J. D. Sally, P. J. Sally, Jr., *A Vertical Development of Mathematical Problems*, AMS, 2007. ⟨121, 123–126, 128–133⟩.

[San2] D. A. Santos, *Elementary Number Theory Notes*, Preprint, Internet 2002. ⟨9, 63, 64⟩.

[San4j] D. A. Santos, *Junior Problem Seminar*, Preprint, Internet 2004. ⟨57⟩.

[Sand] J. Sándor, *Geometric Theorems, Diophantine Equations, and Arithmetic Functions*, American Research Press, Rehoboth, 2002. ⟨100, 101, 159, 160⟩.

[SaP] W. A. Sadowniczij, A. S. Podkolzin, *Zadania Studenckich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), Moskwa, Nauka, 1978. ⟨172⟩.

[SavA] S. Savchev, T. Andreescu, *Mathematical Miniatures*, The Mathematical Association of America, Anneli Lax New Mathematical Library, vol. 43, 2003. ⟨188⟩.

[SPom] Sprwozdanie Komitetu Głównego Polskiej Olimpiady Matematycznej. ⟨93⟩.

[StaZ] E. Stachowski, A. Zalewska, *Zbiór Zadań dla Nauczycieli Prowadzących Koła Matematyczne*, Instytut Kształcenia Nauczycieli, Warszawa, 1984. ⟨56, 76, 78, 160, 161, 167⟩.

[Str72] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom IV, 16-20, 64/65 - 68/69, PZWS, Warszawa, 1972. ⟨81, 83, 91⟩.

[Tatt] J. J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, Second Edition, Cambridge University Press, 2005. ⟨113⟩.

[Trad] M. Trąd, *Zasada Szufladkowa Dirichleta*, WSP, Zielona Góra, 1990. ⟨54, 160, 162, 167⟩.

[Tri] Ch. Trigg, *Mathematical Quickies*, McGraw-Hill Book Company, New York-London, 1967. Tłumaczenie rosyjskie: Moskwa, 2000. ⟨146⟩.

[Trost] E. Trost, *Primzahlen*, Verlag Birkhauser, Basel - Stuttgard. Tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1959. ⟨198⟩.

[TT] Tournament of the Towns. ⟨16, 113⟩.

[Uiuc] UIUC Undergraduate Math Contest, University of Illinois at Urbana-Champaign. ⟨ ⟩.

[Ull] D. Ullman, *More on the four-numbers game*, Mathematics Magazine, 65(1992), 170-174. ⟨121⟩.

[UsaT] USA Mathematical Talent Search. ⟨148, 171⟩.

[WaG] N. B. Wasilev, W. L. Gutenmacher, Z. M. Rabbot, A. L. Toom, *Zaoczne Matematyczne Olimpiady* (po rosyjsku), Moskwa, Nauka, 1987. ⟨56⟩.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988. ⟨6, 57, 61, 80, 164⟩.

[Webb] W. A. Webb, *The length of the four-number game*, The Fibonacci Quartely, 20(1982), 97-105. ⟨121, 129⟩.

[Wino] I. Winogradow, *Elementy Teorii Liczb*, PWN, Warszawa, 1954. ⟨139–141⟩.

[Wmm] XI Międzynarodowe Warsztaty dla Młodych Matematyków, *Teoria Liczb*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2009. ⟨58⟩.

[Wor78] N. N. Worobjow, *Liczby Fibonacciego*, (po rosyjsku), Popularne Lekcje z Matematyki 6, Nauka, Moskwa, 1978; wydanie polskie: Warszawa 1955. ⟨62⟩.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984. ⟨79⟩.

[Zet] S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa, 1964. ⟨148, 149⟩.

[Zve] P. Zvengrowski, *Iterated absolute differences*, Mathematics Magazine, 52(1979), 36-37. ⟨121, 130, 132, 133⟩.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej. ⟨8, 49, 61, 90, 101⟩.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn
e-mail: anow@mat.uni.torun.pl

Skorowidz

Skorowidz